Devoir Surveillé 1

↠ Exercice 1 : 4 points, 10'

La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = 5 - 4u_n \end{cases}$.

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-4)^{n+1} + 1$.

↠ Exercice 2 : 10 points, 20'

(b_n) est la suite définie par $\begin{cases} b_0 = 2 \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{5}b_n + 3 \times 0,5^n \end{cases}$.

1. Calculer b_n pour $n \in [\![0;8]\!]$. On ne donnera pas le détail des calculs et on arrondira au besoin à 10^{-2} près.
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$, $b_n \geqslant \dfrac{15}{4} \times 0,5^n$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$, $b_{n+1} - b_n \leqslant 0$.
   Conclure quant au sens de variation de la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$.

↠ Exercice 3 : 5 points, 10'

Montrer par récurrence que la suite (a_n), définie par $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n + 1 \end{cases}$, est décroissante.

↠ Exercice 4 : 8 points, 15'

La suite (r_n) est définie par $\begin{cases} r_0 = -1 \\ r_{n+1} = \sqrt{r_n + 2} \end{cases}$.

On donne l'algorithme suivant.

Ligne 1	*Entrée*	n entier naturel
Ligne 2	*Traitement*	Affecter à r la valeur ...
Ligne 3		**Pour** k allant de 1 à n
Ligne 4		Affecter à r la valeur ...
Ligne 5		**Fin Pour**
Ligne 6	*Sortie*	Afficher ...

1. Recopier et compléter les lignes de rang pair afin que la sortie de cet algorithme calcule le terme de rang n de la suite (r_n).
2. Démontrer par récurrence que cette suite est croissante.