Devoir Maison 1 - Correction

Niveau Seconde

Prenons deux nombres réels m et m' tels que $m \neq m'$, et notons $\mathcal{P}_m$ et $\mathcal{P}_{m'}$ les paraboles associées. Elles ont pour équations :

$$\mathcal{P}_m : y = 2x^2 - 5mx + 11m \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{m'} : y = 2x^2 - 5m'x + 11m'$$

Notons $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}; y_\mathrm{A})$ l'éventuel point d'intersection de $\mathcal{P}_m$ et $\mathcal{P}_{m'}$. Ses coordonnées vérifient les équations des deux paraboles, on a donc :

$$\begin{cases} y_\mathrm{A} = 2x_\mathrm{A}^2 - 5mx_\mathrm{A} + 11m \\ y_\mathrm{A} = 2x_\mathrm{A}^2 - 5m'x_\mathrm{A} + 11m' \end{cases}$$

Ce système d'équations est équivalent à :

$$\begin{aligned}
&2x_\mathrm{A}^2 - 5mx_\mathrm{A} + 11m = 2x_\mathrm{A}^2 - 5m'x_\mathrm{A} + 11m' \\
&\iff -5mx_\mathrm{A} + 11m + 5m'x_\mathrm{A} - 11m' = 0 \\
&\iff 5x_\mathrm{A}(m' - m) - 11(m' - m) = 0 \\
&\iff (m' - m)(5x_\mathrm{A} - 11) = 0 \\
&\iff m' - m = 0 \quad \text{ou} \quad 5x_\mathrm{A} - 11 = 0 \\
&\iff m' = m \quad \text{ou} \quad x_\mathrm{A} = \frac{11}{5} \\
&\iff x_\mathrm{A} = \frac{11}{5} \quad \text{car on a supposé que } m \neq m'.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a prouvé que les paraboles $\mathcal{P}_m$ et $\mathcal{P}_{m'}$ admettent un point d'intersection A, et qu'il est unique. Son abscisse est $x_\mathrm{A} = \frac{11}{5}$. On calcule son ordonnée en remplaçant x_A dans l'équation de $\mathcal{P}_m$ (on aurait également pu le faire dans celle de $\mathcal{P}_{m'}$) :

$$\begin{aligned}
y_\mathrm{A} &= 2 \times \left(\frac{11}{5}\right)^2 - 5m \times \frac{11}{5} + 11m \\
&= 2 \times \frac{121}{25} - 11m + 11m \\
&= \frac{242}{25}
\end{aligned}$$

Les coordonnées de A ne dépendent ni de m, ni de m'.

Conclusion : Quelle que soit la valeur du nombre réel m, la parabole $\mathcal{P}_m$ passe par le point $\mathrm{A}\left(\frac{11}{5} ; \frac{242}{25}\right)$.

Niveau Première

1. On souhaite résoudre l'équation $\mathcal{E}_1 : f(x) = 0$ avec :

$$f : x \mapsto 12x^3 - 8x^2 - 35x + 6.$$

   (a) On calcule quelques images de nombres entiers naturels par la fonction f, jusqu'à s'apercevoir que :

$$\begin{aligned} f(2) &= 12 \times 2^3 - 8 \times 2^2 - 35 \times 2 + 6 \\ &= 12 \times 8 - 8 \times 4 - 70 + 6 \\ &= 96 - 32 - 64 \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Ainsi, $x_0 = 2$ est une racine triviale de f.

   (b) Procédons par équivalences : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & f(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c) \\ \iff & 12x^3 - 8x^2 - 35x + 6 = ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c \\ \iff & 12x^3 - 8x^2 - 35x + 6 = ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c \end{aligned}$$

   En procédant par identification, on obtient :

$$\begin{cases} a = 12 \\ b - 2a = -8 \\ c - 2b = -35 \\ -2c = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 12 \\ b = 16 \\ c = -3 \end{cases}$$

   Ainsi, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x-2)(12x^2 + 16x - 3)$.

   (c) D'après la question précédente, l'équation $\mathcal{E}_1$ se ramène donc à l'équation suivante :

$$\begin{aligned} (x-2)(12x^2 + 16x - 3) = 0 &\iff x - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad 12x^2 + 16x - 3 = 0 \\ &\iff x = 2 \quad \text{ou} \quad 12x^2 + 16x - 3 = 0 \end{aligned}$$

   Pour résoudre l'équation $12x^2 + 16x - 3 = 0$, on calcule son discriminant : $\Delta = 16^2 - 4 \times 12 \times (-3) = 400 > 0$ donc l'équation admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-16 - \sqrt{400}}{2 \times 12} = \frac{-3}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{16 + \sqrt{400}}{2 \times 12} = \frac{1}{6}.$$

   On conclut : l'ensemble solution de $\mathcal{E}_1$ est : $\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{6} ; \frac{-3}{2} ; 2 \right\}$.

2. Notons $g : x \mapsto 3x^3 - 14x^2 + 22x - 21$, définie sur $\mathbb{R}$.

On calcule quelques images de nombres entiers naturels par la fonction g, jusqu'à s'apercevoir que :

$$\begin{aligned} g(3) &= 3 \times 3^3 - 14 \times 3^2 + 22 \times 3 - 21 \\ &= 3 \times 27 - 14 \times 9 + 66 - 21 \\ &= 81 - 126 + 45 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $x_0 = 3$ est une racine triviale de g. L'expression $g(x)$ peut donc être factorisée de la manière suivante : $g(x) = (x-3)(ax^2 + bx + c)$ avec $(a\,;b\,;c) \in \mathbb{R}^3$.
Procédons par équivalences : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & g(x) = (x-3)(ax^2 + bx + c) \\ \iff & 3x^3 - 14x^2 + 22x - 21 = ax^3 + bx^2 + cx - 3ax^2 - 3bx - 3c \\ \iff & 3x^3 - 14x^2 + 22x - 21 = ax^3 + (b-3a)x^2 + (c-3b)x - 3c \end{aligned}$$

En procédant par identification, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} a = 3 \\ b - 3a = -14 \\ c - 3b = 22 \\ -3c = -21 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a = 3 \\ b = -5 \\ c = 7 \end{array}\right.$$

Ainsi, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = (x-3)(3x^2 - 5x + 7)$.
L'équation $\mathcal{E}_2$ se ramène donc à l'équation suivante :

$$\begin{aligned} (x-3)(3x^2 - 5x + 7) = 0 &\iff x - 3 = 0 \quad \text{ou} \quad 3x^2 - 5x + 7 = 0 \\ &\iff x = 3 \quad \text{ou} \quad 3x^2 - 5x + 7 = 0 \end{aligned}$$

Pour résoudre l'équation $3x^2 - 5x + 7 = 0$, on calcule son discriminant : $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 7 = -59 < 0$ donc cette équation n'admet aucune solution.
On conclut : l'ensemble solution de $\mathcal{E}_2$ est : $\mathcal{S} = \{3\}$.