Chapitre 1

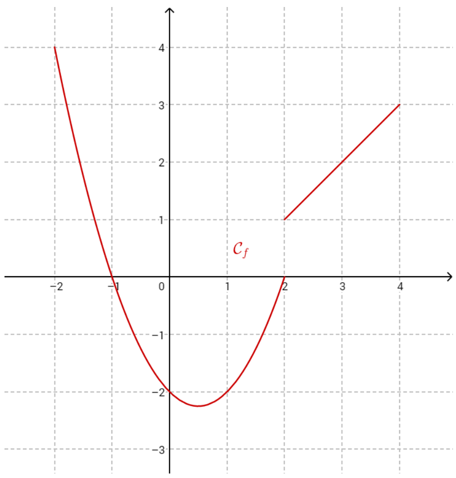
Continuité des fonctions

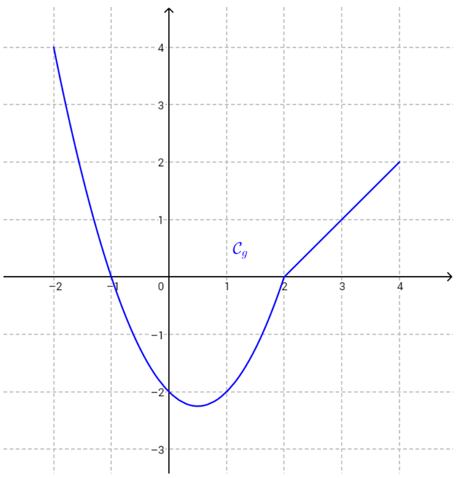
1.1 Continuité d'une fonction sur un intervalle

Définition. *Une fonction f définie sur un intervalle I est* ***continue sur*** *I si l'on peut tracer sa courbe représentative sans coupure sur cet intervalle.*

Autrement dit, on n'a pas besoin de lever le crayon lorsque l'on trace la courbe représentative d'une fonction continue à la main.

Exemple. *Si l'on observe les courbes représentant deux fonctions f et g définies sur $[-2\,;4]$:*





on constate que :

- *f est discontinue en $x = 1$: elle n'est donc pas continue sur $[-2\,;4]$;*
- *g est continue sur $[-2\,;4]$.*

Théorème.

- *Les fonctions polynômes sont continues sur* $\mathbb{R}$ *;*
- *La fonction inverse est continue sur* $]-\infty\,;0[$ *et sur* $]0\,;+\infty[$ *;*
- *La fonction racine carrée est continue sur* $[0\,;+\infty[$.

Propriété. *Si une fonction est dérivable sur un intervalle, alors elle est continue sur cet intervalle.*

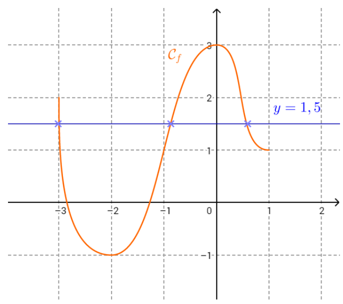
Remarque. *Lorsqu'une flèche est tracée dans un tableau de variations d'une fonction pour un intervalle donné, cela signifie que la fonction est monotone (croissante, décroissante ou constante) sur cet intervalle* ***et*** *qu'elle y est continue.*

1.2 Propriété des valeurs intermédiaires

Propriété. *Si une fonction* f *est continue sur un intervalle* $[a\,;b]$ *alors, pour tout nombre réel* k *compris entre* $f(a)$ *et* $f(b)$*, l'équation* $f(x)=k$ *admet au moins une solution dans* $[a\,;b]$.

Exemple.

La fonction f *représentée ci-contre est définie et continue sur* $[-3\,;1]$.
Elle y varie entre $f(-3)=2$ *et* $f(1)=1$.
Ainsi, l'équation $f(x)=1{,}5$ *admet au moins une solution sur* $[-3\,;1]$ *(elle en admet en fait trois).*



Propriété. *Si une fonction* f *est continue et strictement monotone sur un intervalle* $[a\,;b]$ *alors, pour tout nombre réel* k *compris entre* $f(a)$ *et* $f(b)$*, l'équation* $f(x)=k$ *admet une unique solution dans* $[a\,;b]$.

Exemple.

La fonction g *représentée ci-contre est définie, continue et strictement croissante sur* $[-1\,;4]$.
Elle y varie entre $g(-1)=-1$ *et* $g(4)=5$.
Ainsi, l'équation $g(x)=2$ *admet une unique solution sur* $[-1\,;4]$.