Chapitre 1 - Continuité des fonctions

Paul DARTHOS

Lycée Jaufré RUDEL - BLAYE

4 septembre 2017

Notion de fonction continue

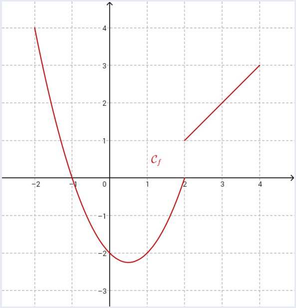
Définition

Une fonction f définie sur un intervalle I est ***continue sur I*** *si l'on peut tracer sa courbe représentative sans coupure sur cet intervalle.*
Autrement dit, on n'a pas besoin de lever le crayon lorsque l'on trace la courbe représentative d'une fonction continue à la main.

Contre-exemple

Contre-exemple

Considérons la fonction f, définie sur $\mathcal{D}_f = [-2\,;4]$ par sa courbe représentative ci-contre :

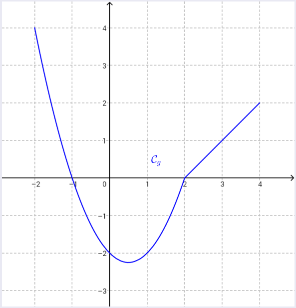


f n'est pas continue en $x = 1$. Elle n'est donc pas continue sur $[-2\,;4]$.
Par contre, f est continue sur $[-2\,;0]$ ou sur $[3\,;4]$ par exemple.

Exemple

Exemple

Considérons la fonction g, définie sur $\mathcal{D}_g = [-2\,;4]$ par sa courbe représentative ci-contre :



g est continue sur $[-2\,;4]$.

Continuité des fonctions usuelles

Théorème

- *Les fonctions polynômes sont continues sur* $\mathbb{R}$ *;*
- *La fonction inverse est continue sur* $]-\infty\,;0[$ *et sur* $]0\,;+\infty[$ *;*
- *La fonction racine carrée est continue sur* $[0\,;+\infty[$*.*

Propriété

Si une fonction est dérivable sur un intervalle, alors elle est continue sur cet intervalle.

Une remarque importante

Remarque

Lorsqu'une flèche est tracée dans un tableau de variations d'une fonction pour un intervalle donné, cela signifie que la fonction est monotone (croissante, décroissante ou constante) sur cet intervalle ***et*** *qu'elle y est continue.*

Propriété des valeurs intermédiaires

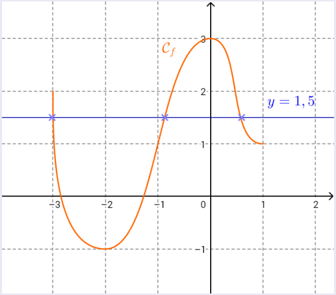
Propriété

Si une fonction f est continue sur un intervalle $[a\,;b]$ alors, pour tout nombre réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $[a\,;b]$.

Un exemple d'application

Exemple

La fonction f représentée ci-contre est définie et continue sur $[-3\,;1]$.
Elle y varie entre $f(-3) = 2$ et $f(1) = 1$.
Ainsi, l'équation $f(x) = 1{,}5$ admet au moins une solution sur $[-3\,;1]$ (elle en admet en fait trois).



Corollaire de la propriété des valeurs intermédiaires

Propriété

Si une fonction f est continue et strictement monotone sur un intervalle $[a\,;b]$ alors, pour tout nombre réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\,;b]$.

Un exemple d'application

Exemple

La fonction g représentée ci-contre est définie, continue et strictement croissante sur $[-1\,;4]$.
Elle y varie entre $g(-1) = -1$ *et* $g(4) = 5$.
Ainsi, l'équation $g(x) = 2$ *admet une unique solution sur* $[-1\,;4]$.