Devoir Maison 1 - Correction

Exercice 1

1. f est dérivable sur $[-2\,;3]$ et : $f'(x) = 3x^2 - 4x$.
   Une équation de $\mathcal{T}_2$ est :

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_2 : & y = f'(2) \times (x-2) + f(2)\\ & y = (3 \times 2^2 - 4 \times 2)(x-2) + 2^3 - 2 \times 2^2 + 1\\ & y = 4(x-2) + 1\\ & y = 4x - 7\end{aligned}$$

2. On étudie le signe de $f'(x) = 3x^2 - 4x$; pour cela on résout :

$$\begin{aligned}f'(x) = 0 & \Longleftrightarrow 3x^2 - 4x = 0\\ & \Longleftrightarrow x(3x-4) = 0\\ & \Longleftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

   Comme de plus f' est un polynôme du deuxième degré ayant un coefficient dominant strictement positif, on en tire le tableau de signes de $f'(x)$ et de variations de f :

x	-2		0		$\frac{4}{3}$		3
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	-15	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{-5}{27}$	$\nearrow$	10

Calculs :

- $f(-2) = -15$;
- $f(0) = 1$;
- $f\left(\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{-5}{27}$;
- $f(3) = 10$.

f est continue et strictement croissante sur $[-2\,;0]$. Elle y varie entre $-15 < 0$ et $1 > 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[-2\,;0]$.

f est continue et strictement décroissante sur $\left[0\,;\dfrac{4}{3}\right]$. Elle y varie entre $1 > 0$ et $\dfrac{-5}{27} < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution β sur $\left[0\,;\dfrac{4}{3}\right]$.

f est continue et strictement croissante sur $\left[\dfrac{4}{3}\,;3\right]$. Elle y varie entre $\dfrac{-5}{27} < 0$ et $10 > 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution γ sur $\left[\dfrac{4}{3}\,;3\right]$.

D'après la calculatrice : $\alpha \approx -0{,}618$, $\beta = 1$ et $\gamma \approx 1{,}618$.

3. (a) g est dérivable sur $[-2\,;3]$ et : $g'(x) = f'(x) - 4 = 3x^2 - 4x - 4$.

   On étudie le signe de $g'(x) = 3x^2 - 4x - 4$; pour cela on résout : $3x^2 - 4x - 4 = 0$.

   On calcule le discriminant de cette équation : $\Delta = (-4)^2 - 4\times 3\times(-4) = 64 > 0$.

   L'équation admet alors deux solutions :

$$x_1 = \frac{4-\sqrt{64}}{2\times 3} = \frac{-2}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{4+\sqrt{64}}{2\times 3} = 2.$$

   Comme de plus g' est un polynôme du deuxième degré ayant un coefficient dominant strictement positif, on en tire le tableau de signes de $g'(x)$ et de variations de g :

x	-2		$\frac{-2}{3}$		2		3
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de g	0	$\nearrow$	$\frac{256}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	5

   Calculs :

   - $g(-2) = 0$;
   - $g\left(\dfrac{-2}{3}\right) = \dfrac{256}{27}$;
   - $g(2) = 0$;
   - $g(3) = 5$.

   (b) On en tire le tableau de signes de $g(x)$ sur $[-2\,;3]$:

x	-2		3
Signe de $g(x)$		$+$	

   (c) La fonction g est toujours positive. Elle est égale à la différence entre $f(x)$ et $(4x-7)$ qui correspond à $\mathcal{T}$, donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est toujours au-dessus de $\mathcal{T}$ sur $[-2\,;3]$ (avec contact en $x = -2$ et $x = 2$).

Exercice 2

1. On calcule les taux d'évolution avec la formule : $t = \dfrac{V_A - V_D}{V_D}$. On arrondit au millième.

Année	2013 → 2014	2014 → 2015	2015 → 2016
Bénéfice	0,055	0,055	0,055

   On constate que l'évolution de ce bénéfice d'une année à l'autre reste sensiblement la même : en arrondissant à 0,1%, l'évolution est de 5,5% par an.

2. Entre 2016 et 2020, il y a 4 évolutions successives, chacune correspondant à une hausse de 5,5%. On peut en déduire un chiffre d'affaires prévisionnel pour 2020 de : $5871{,}2 \times 1{,}055^4 \approx 7273{,}39$ €.

3. D'après cette modélisation, le bénéfice total sur la période de 2013 à 2025 serait de :

$$\mathcal{B} = 5000 + 5275 + 5565{,}1 + 5871{,}2 \times \frac{1 - 1{,}055^{10}}{1 - 1{,}055} \approx 91433{,}88\text{€}.$$

   Alternativement, on peut calculer ce bénéfice total avec la formule :

$$\mathcal{B} = 5000 \times \frac{1 - 1{,}055^{13}}{1 - 1{,}055} \approx 91433{,}99\text{€}.$$

4.

```
B ⟵ 5000
S ⟵ 5000
Pour I allant de 1 à N
| B ⟵ B × 1,055
| S ⟵ S + B
Fin Pour
```