Devoir Maison 2

À rendre le mardi 7 novembre 2017

Exercice 1 - Une étude de cas économique

Partie A

On étudie la fonction $g : x \mapsto x^3 - 1200x - 100$ définie sur $[10\,;100]$.

1. Dresser le tableau de variations complet de g sur $[10\,;100]$.
2. (a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[10\,;100]$.

   (b) Donner un encadrement de α au millième.
3. En déduire le tableau de signes de $g(x)$ sur $[10\,;100]$.

Partie B

On étudie la fonction $f : x \mapsto x + 50 + \dfrac{1200x + 50}{x^2}$ définie sur $[10\,;100]$.

1. (a) Démontrer que pour tout nombre $x \in [10\,;100]$, on a : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.

   (b) Dresser le tableau de variations de f sur $[10\,;100]$.
2. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 130$ admet exactement deux solutions β et γ sur $[10\,;100]$.

   (b) Donner un encadrement de β et γ au millième.

Partie C

Le coût **total** de fabrication, en milliers d'euros, d'une quantité x d'un produit, exprimée en centaines d'unités, est défini sur $[10\,;100]$ par :

$$C(x) = \frac{x^3 + 50x^2 + 1200x + 50}{x}.$$

1. Montrer que, pour $x \in [10\,;100]$, le coût **moyen** de fabrication par centaines d'objets est égal à $f(x)$.
2. Déterminer la quantité d'objets, à la centaine près, à fabriquer pour avoir un coût moyen minimum.
3. Le prix de vente d'une centaine d'objets est égal à 130000€. Déterminer graphiquement, à la centaine près, le nombre minimum et le nombre maximum d'objets que l'entreprise doit fabriquer pour être rentable.

Exercice 2 - Multiplicateur keynésien

On va étudier les effets d'un investissement de 100000€ réalisé dans un contexte économique où l'on suppose que 30% des revenus en moyenne sont épargnés et les 70% restants sont consommés (et donc réinjectés dans l'économie).

- *Étape 0 :* On suppose que l'investissement initial est de 100000€. Il constitue un revenu supplémentaire pour les entreprises.
- *Étape 1 :* Les agents de ces entreprises épargnent 30% de la somme, soit 30000€, et accroissent de 70000€ leurs dépenses.
- *Étape 2 :* Cette dépense représente donc un revenu supplémentaire de 70000€ pour des entreprises : leurs agents en épargnent 30%, soit 21000€, et accroissent de 49000€ leurs dépenses.
- Et ainsi de suite...

Partie A - Dans un tableur

Afin de faciliter l'étude, on prépare une feuille de calcul comme ci-dessous.

	A	B	C	D	E
1	Investissement de départ :		100000		
2					
3	Étape	Épargne supplémentaire engendrée	Revenu supplémentaire engendré	Épargne totale	Revenu total
4	0		100000		100000
5	1	30000	70000	30000	170000
6	2				
7	3				
8	4				

1. Quelles formules, à recopier ensuite vers le bas, entre-t-on en cellules **B5** et **C5** ?
2. En colonnes **D** et **E**, on souhaite calculer le total de l'épargne générée et le total du revenu généré à une étape donnée.
   Proposer une formule à entrer en **D5** et **E5** puis à recopier vers le bas.
3. Réaliser la feuille de calcul jusqu'à l'étape 50.
   Observer le revenu total généré et l'épargne totale générée quand le nombre d'étapes devient grand. Quelle(s) conjecture(s) peut-on faire ?

Partie B - Avec des suites

Pour tout nombre entier naturel n, on pose :

- e_n l'épargne supplémentaire générée à l'étape n en milliers d'euros (on pose $e_0 = 0$) ;
- r_n le revenu supplémentaire généré à l'étape n en milliers d'euros (on pose $r_0 = 100$).

1. (a) Déterminer la nature de la suite (e_n) et en déduire l'expression de e_n en fonction de n.
   (b) Exprimer l'épargne totale générée jusqu'à l'étape n, notée E_n en fonction de n.

(c) De quelle valeur semble se rapprocher E_n lorsque n devient très grand ?

2. Exprimer le revenu total généré jusqu'à l'étape n, noté R_n en fonction de n. De quelle valeur semble se rapprocher R_n lorsque n devient très grand ?

Partie C - Généralisation

On note maintenant I le montant de l'investissement initial et l'on suppose que le taux de dépenses est c où $0 < c < 1$ (dans l'exemple de départ, on considérait que $c = 0{,}7 = 70\%$).

1. Exprimer e_n et r_n en fonction de I, c et n.
2. En déduire que la somme R_n des revenus engendrés se rapproche, lorsque n devient grand, de $\mathrm{I} \times \dfrac{1}{1-c}$.

Le coefficient $\dfrac{1}{1-c}$ est appelé **multiplicateur keynésien** ou **multiplicateur d'investissement**.

3. Démontrer le paradoxe suivant : quel que soit l'investissement initial et le taux de dépenses, la somme de l'épargne engendrée tend vers l'investissement initial.