

# Devoir Surveillé 1 - Correction

## Exercice 1 - Algorithmme

1. Si l'on rentre  $n = 2$ , l'algorithme renvoie 20.
2. Si l'on rentre  $n = 5$ , l'algorithme renvoie 160.
3. La suite étudiée dans cet algorithme est géométrique de premier terme 5 et de raison 2.

## Exercice 2 - Suites

1. La première année, les intérêts seront de :  $0,02 \times 10000 = 200\text{€}$ . Le capital placé au terme de cette année sera alors de  $10200\text{€}$ .
2. La deuxième année, les intérêts seront de :  $0,02 \times 10200 = 204$  euros. Le capital placé au terme de cette année sera alors de  $10404$  euros.
3. On a :  $C_{n+1} = 1,02 \times C_n$ .  
( $C_n$ ) est une suite géométrique de raison  $q = 1,02$  et de premier terme  $C_0 = 10000$ .
4. Comme ( $C_n$ ) est une suite géométrique de premier terme  $C_0 = 10000$  et de raison  $q = 1,02$ , on a :  $C_n = 10000 \times 1,02^n$ .
5. Au bout de 72 ans, le capital placé sera de :  $C_{72} = 10000 \times 1,02^{72} \approx 41611\text{€}$ .

## Problème - Étude de fonctions

1. (a)  $g'(x) = 3x^2 + 3 \times 2x + 0 = 3x^2 + 6x$ .  
(b) On résout :  $g'(x) = 3x^2 + 6x = 0$ . Pour cela, on calcule le discriminant de cette équation :  $\Delta = 6^2 - 4 \times 3 \times 0 = 36 > 0$  donc l'équation admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-6 - \sqrt{36}}{2 \times 3} = \frac{-12}{6} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-6 + \sqrt{36}}{2 \times 3} = \frac{-6 + 6}{6} = 0.$$

On en tire le tableau de signes de  $g'(x)$ , en sachant que  $g'(x)$  est une fonction trinôme de coefficient dominant  $3 > 0$  :

|                     |           |      |     |           |   |
|---------------------|-----------|------|-----|-----------|---|
| $x$                 | $-\infty$ | $-2$ | $0$ | $+\infty$ |   |
| Signe<br>de $g'(x)$ | +         | 0    | -   | 0         | + |

- (c) On en tire le tableau de variations de  $g$  :

|                      |           |      |     |           |
|----------------------|-----------|------|-----|-----------|
| $x$                  | $-\infty$ | $-2$ | $0$ | $+\infty$ |
| Variations<br>de $g$ |           |      |     |           |

**Calculs :**

- $g(-2) = (-2)^3 + 3 \times (-2)^2 + 2 = -8 + 3 \times 4 + 2 = -8 + 12 + 2 = 6$  ;

- $g(0) = 0^3 + 3 \times 0^2 + 2 = 2$ .

(d)  $g$  est continue et strictement croissante sur  $[-4; -3]$ , elle y varie entre  $-14$  et  $2$ . D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans cet intervalle.

(e) D'après la calculatrice,  $\alpha \approx -3,2$ .

(f) On en tire le tableau de signes de  $g(x)$  :

|                    |           |          |           |
|--------------------|-----------|----------|-----------|
| $x$                | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
| Signe<br>de $g(x)$ | -         | 0        | +         |

2. (a)  $f(x) = \frac{u}{v}$  avec  $u = x^3 - 1$ , donc  $u' = 3x^2$ , et  $v = x^2 + 2x + 1$  donc  $v' = 2x + 2$ . On a alors :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{u' \times v - u' \times v}{v^2} \\
 &= \frac{3x^2(x^2 + 2x + 1) - (x^3 - 1)(2x + 2)}{(x^2 + 2x + 1)^2} \\
 &= \frac{3x^4 + 6x^3 + 3x^2 - (2x^4 + 2x^3 - 2x - 2)}{((x + 1)^2)^2} \\
 &= \frac{3x^4 + 6x^3 + 3x^2 - 2x^4 - 2x^3 + 2x + 2}{(x + 1)^4} \\
 &= \frac{x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 2}{(x + 1)^4}
 \end{aligned}$$

3. (a) D'après les questions précédentes, on obtient le tableau de signes suivant :

|                         |       |          |      |
|-------------------------|-------|----------|------|
| $x$                     | $-10$ | $\alpha$ | $-1$ |
| Signe<br>de $g(x)$      | -     | 0        | +    |
| Signe de<br>$(x + 1)^3$ | -     |          | 0    |
| Signe de<br>$f'(x)$     | +     | 0        | -    |

(b) On en tire enfin le tableau de variations de  $f$  :

|                      |          |             |      |
|----------------------|----------|-------------|------|
| $x$                  | $-10$    | $\alpha$    | $-1$ |
| Variations<br>de $f$ | $f(-10)$ | $f(\alpha)$ |      |

**Calculs :**

- $f(-10) \approx -12,36$
- $f(-3,2) \approx -6,98$  d'après la calculatrice.