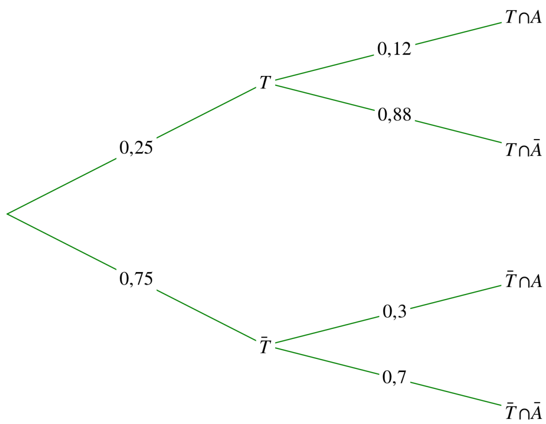
Devoir Surveillé 2 - Correction

Exercice 1 - Probabilités



1.
2. (a) La probabilité que le fruit prélevé soit traité et abîmé est la suivante :

$$\mathrm{P}(\mathrm{T} \cap \mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{T}) \times \mathrm{P}_{\mathrm{T}}(\mathrm{A}) = 0{,}25 \times 0{,}12 = 0{,}03.$$

   (b) Les événements T et $\overline{\mathrm{T}}$ forment une partition de l'univers. En vertu de la loi des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\mathrm{A}) &= \mathrm{P}(\mathrm{T} \cap \mathrm{A}) + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{T}} \cap \mathrm{A}) \\ &= 0{,}03 + 0{,}75 \times 0{,}3 \\ &= 0{,}255\end{aligned}$$

3. Sachant que le fruit prélevé est abîmé, la probabilité qu'il provienne de la partie du champ qui a été traitée est la suivante :

$$\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{T}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{T} \cap \mathrm{A})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})} = \frac{0{,}03}{0{,}255} \approx 0{,}118.$$

   On ne peut pas affirmer qu'il y ait une chance sur quatre que le fruit prélevé provient de la partie traitée du champ.

Exercice 2 - Suites

1. Diminuer une quantité de 15% revient à multiplier cette quantité par 0,85. Ainsi :
   - le volume prélevé au bout d'un an est : $V_1 = 32 \times 0{,}85 = 27{,}2$ millions de barils ;
   - le volume prélevé au bout de deux ans est : $V_2 = 27{,}2 \times 0{,}85 = 23{,}12$ millions de barils.
2. Comme on diminue de 15% le volume prélevé d'une année sur l'autre, on multiplie par 0,85 la quantité V_n pour obtenir V_{n+1} :

$$V_{n+1} = 0{,}85 \times V_n.$$

   La suite (V_n) est géométrique de raison $q = 0{,}85$ et de premier terme $V_0 = 32$.

3. D'après le cours : $V_n = 32 \times 0{,}85^n$.
4. Au bout de 10 ans, le volume prélevé sera de :

$$V_{10} = 32 \times 0{,}85^{10} \approx 6{,}3 \text{ millions de barils.}$$

5. (a) S_n correspond à la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite géométrique (V_n). D'après le cours :

$$S_n = S_0 \times \frac{1-q^n}{1-q} = 32 \times \frac{1-0{,}85^{n+1}}{1-0{,}85} = \frac{640}{3} \times (1-0{,}85^{n+1}).$$

(b) On calcule, à l'aide de la formule précédente :

$$S_{10} = \frac{640}{3} \times (1-0{,}85^{11}) \approx 177{,}6 \text{ millions de barils.}$$

Cela signifie que sur les 11 premières années écoulées, l'exploitant aura prélevé 177,6 millions de barils de pétrole dans la région.

Exercice 3 - Fonctions

1. (a) Si le supermarché achète 300 kilogrammes de fruits, le prix au kilogramme sera de :

$$\mathrm{P}(300) = \frac{300+300}{300+100} = 1{,}5\text{€}.$$

(b) Le montant total de cette commande de 300 kilogrammes de fruits sera alors de :

$$300 \times \mathrm{P}(300) = 300 \times 1{,}5 = 450\text{€}.$$

2. (a) La dérivée de P est :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}'(x) &= \frac{1(x+100)-(x+300)\times 1}{(x+100)^2}\\ &= \frac{x+100-x-300}{(x+100)^2}\\ &= \frac{-200}{(x+100)^2}\end{aligned}$$

(b) Il est évident que si $x \in [100\,;1000]$ alors $\mathrm{P}'(x) < 0$.
On en tire le tableau de signes de $\mathrm{P}'(x)$ et le tableau de variations de P sur $[100\,;1000]$:

x	100		1000
Signe de $\mathrm{P}'(x)$		$-$	
Variations de P	2	$\searrow$	$\frac{13}{11}$

Calculs :

- $\mathrm{P}(100) = \dfrac{100+300}{100+100} = 2$;
- $\mathrm{P}(1000) = \dfrac{1000+300}{1000+100} = \dfrac{13}{11} \approx 1{,}18$.

3. (a) La dérivée de S est :

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}'(x) &= 1 \times \mathrm{P}(x) + x \times \mathrm{P}'(x) \\
&= \frac{x+300}{x+100} + x \times \frac{-200}{(x+100)^2} \\
&= \frac{(x+300)\times(x+100)}{(x+100)\times(x+100)} + \frac{-200x}{(x+100)^2} \\
&= \frac{x^2+100x+300x+30000-200x}{(x+100)^2} \\
&= \frac{x^2+200x+30000}{(x+100)^2}
\end{aligned}$$

(b) On souhaite étudier le signe de $\mathrm{S}'(x)$ sur $[100\,;1000]$: il s'agit d'une fraction dont le dénominateur est toujours strictement positif. Ainsi, on doit simplement étudier le signe de $(x^2+200x+30000)$.

On résout tout d'abord $x^2+200x+30000 = 0$. On calcule le discriminant :

$$\Delta = 200^2 - 4 \times 1 \times 30000 = -80000 < 0.$$

L'équation n'admet donc aucune solution : $(x^2+200x+30000)$ sera toujours de signe strictement positif car son coefficient dominant vaut $a = 1$ qui est strictement positif.

On en tire le tableau de signes de $\mathrm{S}'(x)$ et le tableau de variations complet de S sur $[100\,;1000]$:

x	100	1000
Signe de $\mathrm{S}'(x)$	+	
Variations de S	200 ↗	$\frac{13000}{11}$

Calculs :

- $\mathrm{S}(100) = 100 \times \mathrm{P}(100) = 100 \times 2 = 200$;
- $\mathrm{S}(1000) = 100 \times \mathrm{P}(1000) = 1000 \times \dfrac{13000}{11} \approx 1182$.

(c) Le supermarché disposant d'un budget de 900 euros pour la commande de fruits, on doit résoudre $\mathrm{S}(x) = 900$ pour trouver la valeur du poids maximum de fruits que le magasin peut commander.

La fonction S est continue et strictement croissante sur $[100\,;1000]$, elle y varie entre $200 < 900$ et $\dfrac{13000}{11} > 900$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\mathrm{S}(x) = 900$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[100\,;1000]$.

D'après la calculatrice : $724 < \alpha < 725$.

Ainsi, le supermarché pourra commander au maximum 724 kilogrammes de fruits à son fournisseur avec le budget dont il dispose.

Exercice 4 - Algorithme

1.
```
U ⟵ 15
S ⟵ 15
Pour I allant de 1 à 19
| U ⟵ U × 4
| S ⟵ S + U
Fin Pour
```
Attention ! *I varie entre 1 et 19 car S contient la valeur du premier terme de la suite avant exécution de la boucle Pour. On doit donc y ajouter les 19 termes suivants pour que S contienne bien les 20 premiers termes de la suite au total.*

2. Après exécution de l'algorithme, on obtient : $S = 5{,}498 \times 10^{12}$.