Chapitre 3

Probabilités conditionnelles

3.1 Généralités et définition

3.1.1 Un exemple très simple

On considère le lancer d'un dé équilibré à six faces numérotées, qui constitue une expérience aléatoire.

On note A l'événement « Le 6 ne sort pas », on a facilement : $\mathrm{P}(A) = \dfrac{5}{6}$.

On note B l'événement « Il sort un nombre pair », on a facilement : $\mathrm{P}(B) = \dfrac{1}{2}$.

Si l'on sait que A est réalisé (condition nouvelle de l'expérience), on a alors : $\mathrm{P}_A(A) = 1$ et $\mathrm{P}_A(B) = \dfrac{2}{5}$, où $\mathrm{P}_A(B)$ se lit « Probabilité de B sachant que A est réalisé ».

On remarque que $\mathrm{P}(A \cap B) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ car $A \cap B = \{2\,;4\}$; il est important de bien différencier cette probabilité, qui est celle que A **et** B se produisent **en même temps**, de celle calculée précédemment.

Par ailleurs, on note que : $\dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{6}} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{6}{5} = \dfrac{2}{5} = \mathrm{P}_A(B)$.

3.1.2 Définition et propriétés

Définition. *Si A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire tels que $\mathrm{P}(A) \neq 0$ et $\mathrm{P}(B) \neq 0$, alors on note $\mathrm{P}_A(B)$ la* ***probabilité de B en sachant que A se réalise****.*

On a en fait : $\mathrm{P}_A(B) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)}$.

Propriétés. *Si A et B sont deux événements de probabilité non nulle, alors :*

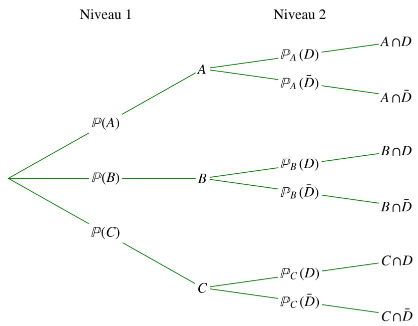
- $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}_B(A) \times \mathrm{P}(B)$;
- $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}_A(B) \times \mathrm{P}(A)$.

3.2 Arbres pondérés

Les arbres pondérés sont construits suivant des règles précises :

Règles.

- *À chaque niveau, on envisage tous les cas possibles. La somme des probabilités de chaque nœud vaut 1.*
- *Les probabilités sur les branches sont des probabilités conditionnelles.*
- *Le produit des probabilités situées sur les branches d'un chemin (par exemple $\Omega - E - F$, où Ω est l'univers et E et F deux événements successifs) correspond à la probabilité de l'événement auquel conduit le chemin (par exemple ici $\mathrm{P}(E \cap F)$).*



3.3 Formule des probabilités totales

Définition. *Dans une expérience aléatoire d'univers Ω, on considère les événements A_1, A_2, ..., A_n. On dit qu'ils constituent une **partition** de Ω si :*

- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n = \Omega$;
- *A_1, A_2, ..., A_n sont deux à deux **disjoints**, c'est-à-dire si $A_i \cap A_j = \varnothing$ lorsque $i \neq j$.*

Théorème. ***La formule des probabilités totales.***

Dans une expérience aléatoire d'univers Ω, on considère les événements A_1, A_2, ..., A_n, qui forment une partition de Ω. Soit E un événement. Alors :

$$\mathrm{P}(E) = \mathrm{P}(A_1 \cap E) + \mathrm{P}(A_2 \cap E) + \ldots + \mathrm{P}(A_n \cap E)$$

$$\mathrm{P}(E) = \mathrm{P}(A_1) \times \mathrm{P}_{A_1}(E) + \mathrm{P}(A_2) \times \mathrm{P}_{A_2}(E) + \ldots + \mathrm{P}(A_n) \times \mathrm{P}_{A_n}(E)$$