Chapitre 3 - Probabilités conditionnelles

Paul DARTHOS

Lycée Jaufré RUDEL - BLAYE

25 septembre 2017

Commençons avec un exemple

Un exemple très simple

On considère le lancer d'un dé équilibré à six faces numérotées, qui constitue une expérience aléatoire.
Si A est l'événement « Le 6 ne sort pas » : $\mathrm{P}(A) = \frac{5}{6}$.
Si B est l'événement « Il sort un nombre pair » : $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$.
Si l'on sait que A est réalisé (condition nouvelle de l'expérience), on a alors : $\mathrm{P}_A(A) = 1$ et $\mathrm{P}_A(B) = \frac{2}{5}$.
$\mathrm{P}_A(B)$ se lit « Probabilité de B sachant que A est réalisé ».
On remarque que $\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ car $A \cap B = \{2; 4\}$; il est important de bien différencier cette probabilité, qui est celle que A **et** B se produisent **en même temps**, de celle calculée précédemment.

Par ailleurs, on note que : $\frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{2}{5} = \mathrm{P}_A(B)$.

Définition

Définition

Si A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire tels que $\mathrm{P}(A) \neq 0$ et $\mathrm{P}(B) \neq 0$, alors on note $\mathrm{P}_A(B)$ la ***probabilité de B en sachant que A se réalise****.*
On a en fait : $\mathrm{P}_A(B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)}$.

Propriétés

On tire de l'égalité donnée dans la définition les propriétés suivantes :

Propriétés

Si A et B sont deux événements de probabilité non nulle, alors :

- $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}_B(A) \times \mathrm{P}(B)$;
- $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}_A(B) \times \mathrm{P}(A)$.

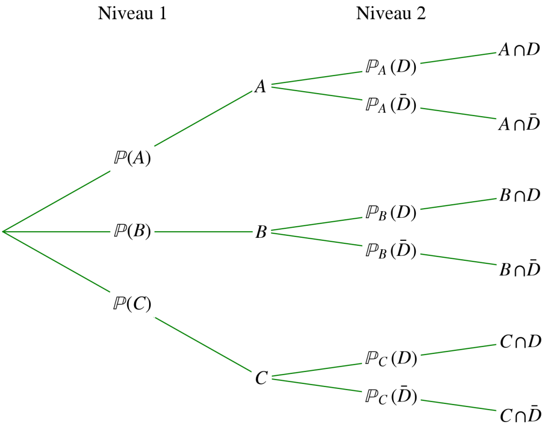
Arbres pondérés

Les arbres pondérés sont construits suivant des règles précises :

Règles

- *À chaque niveau, on envisage tous les cas possibles. La somme des probabilités de chaque nœud vaut* 1.
- *Les probabilités sur les branches (sauf celles du premier niveau) sont des probabilités conditionnelles.*
- *Le produit des probabilités situées sur les branches d'un chemin (par exemple* $\Omega - E - F$*, où* Ω *est l'univers et* E *et* F *deux événements successifs) correspond à la probabilité de l'événement auquel conduit le chemin (par exemple ici* $\mathrm{P}(E \cap F)$*).*

Arbres pondérés



Partitions de l'univers

Définition

Dans une expérience aléatoire d'univers Ω, on considère les événements A_1, A_2, ..., A_n. On dit qu'ils constituent une ***partition*** *de Ω si :*

- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n = \Omega$;
- *A_1, A_2, ..., A_n sont deux à deux* ***disjoints****, c'est-à-dire si $A_i \cap A_j = \emptyset$ lorsque $i \neq j$.*

Formule des probabilités totales

Théorème

La formule des probabilités totales.
Dans une expérience aléatoire d'univers Ω, on considère les événements A_1, A_2, ..., A_n, qui forment une partition de Ω. Soit E un événement. Alors :

$$\mathrm{P}(E) = \mathrm{P}(A_1 \cap E) + \mathrm{P}(A_2 \cap E) + \ldots + \mathrm{P}(A_n \cap E)$$