Devoir Maison 2 - Correction

Exercice 1 - Une étude de cas économique

Partie A

1. g est dérivable sur $[10\,;100]$ et on a : $g'(x) = 3x^2 - 1200$.
   On va étudier le signe de $g'(x)$ sur $[10\,;100]$; pour cela on résout d'abord :
   $$g'(x) = 0 \Longleftrightarrow 3x^2 - 1200 = 0.$$
   On calcule le discriminant : $\Delta = 0^2 - 4 \times 3 \times (-1200) = 14400 > 0$ donc l'équation admet deux solutions :
   $$x_1 = \frac{-0-\sqrt{14400}}{2\times 3} = -20 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-0+\sqrt{14400}}{2\times 3} = 20.$$
   Comme de plus g' est un polynôme du deuxième degré ayant un coefficient dominant strictement positif, on en tire le tableau de signes de $g'(x)$ et de variations de g :

x	10		20		100
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g	-11100	$\searrow$	-16100	$\nearrow$	879900

   Calculs :
   - $g(10) = -11100$;
   - $g(20) = -16100$;
   - $g(100) = 879900$.

2. (a) g est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[20\,;100]$; elle y varie entre $g(10) < 0$ et $g(100) > 0$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[20\,;100]$.
   De plus, le maximum de g sur $[10\,;20]$ vaut -16100 qui est strictement négatif donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet aucune solution sur cet intervalle.
   On conclut : l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[10\,;100]$, et celle-ci est comprise entre 20 et 100.

   (b) D'après la calculatrice, un encadrement de α au millième est :
   $$34{,}682 < \alpha < 34{,}683.$$

3. On en déduit le tableau de signes de $g(x)$ sur $[10\,;100]$:

x	10		α		100
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B

1. (a) f est dérivable sur $[10\,;100]$ et on a :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 1+0+\frac{1200\times x^2-(1200x+50)\times 2x}{(x^2)^2}\\
&= 1+\frac{1200x^2-2400x^2-100x}{x^4}\\
&= 1+\frac{-1200x^2-100x}{x^4}\\
&= 1+\frac{x(-1200x-100)}{x\times x^3}\\
&= 1+\frac{-1200x-100}{x^3}\\
&= \frac{x^3-1200x-100}{x^3}\\
&= \frac{g(x)}{x^3}
\end{aligned}$$

On a bien le résultat attendu.

(b) Comme $x^3>0$ sur $[10\,;100]$, le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $g(x)$ (déjà étudié précédemment). On en tire le tableau suivant :

x	10		α		100
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	180.5	↘	$f(\alpha)$	↗	162.005

Calculs :

- $f(10)=180{,}5$;
- $f(\alpha)\approx 119{,}32$;
- $f(100)=162{,}005$.

2. (a) f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[10\,;\alpha]$; elle y varie entre $f(10)>130$ et $f(\alpha)<130$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=130$ admet une unique solution β sur $[10\,;\alpha]$.

f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[\alpha\,;100]$; elle y varie entre $f(\alpha)<130$ et $f(100)>130$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=130$ admet une unique solution γ sur $[\alpha\,;100]$.

On conclut : l'équation $f(x)=130$ admet exactement deux solutions β et γ sur $[10\,;100]$.

(b) D'après la calculatrice, des encadrements de β et γ au millième sont :

$$20{,}062<\beta<20{,}063 \quad\text{et}\quad 59{,}979<\gamma<59{,}980.$$

Partie C

1. our $x \in [10\,;100]$, le coût **moyen** de fabrication par centaines d'objets est égal au coût total divisé par le nombre de centaines d'objets produits :

$$\begin{aligned}
C_m(x) &= \frac{C(x)}{x} \\
&= \frac{\frac{x^3+50x^2+1200x+50}{x}}{x} \\
&= \frac{x^3+50x^2+1200x+50}{x^2} \\
&= \frac{x^2 \times x + x^2 \times 50 + 1200x + 50}{x^2} \\
&= \frac{x^2(x+50)+1200x+50}{x^2} \\
&= \frac{x^2(x+50)}{x^2} + \frac{1200x+50}{x^2} \\
&= x + 50 + \frac{1200x+50}{x^2} \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

   On obtient bien l'égalité souhaitée.

2. Pour déterminer la quantité d'objets à fabriquer pour avoir un coût moyen minimum, il suffit de lire dans le tableau de variations de f pour quelle valeur de x cette fonction admet un minimum. On lit : $x = \alpha \approx 35$ centaines.

3. Pour x centaines d'objets vendus, la recette de l'entreprise est 130 milliers d'euros par centaine d'objets vendus, et le coût de production est $f(x)$ milliers d'euros par centaine d'objets produits. Le bénéfice moyen est donc, par centaine d'objets, le suivant :

$$B_m(x) = 130 - f(x).$$

   Pour que l'entreprise soit rentable, il faut que $B_m(x) > 0$ donc que $f(x) < 130$. D'après la **partie B**, l'entreprise sera donc rentable entre 21 et 59 centaines d'objets produits.

Exercice 2 - Multiplicateur keynésien

Partie A - Dans un tableur

1. Dans la cellule **B5**, on entre la formule « **=0,3*C4** » et dans la cellule **C5** on entre la formule « **=0,7*C4** ».
2. Dans la cellule **D5**, on entre la formule « **=D4+B5** » et dans la cellule **E5** on entre la formule « **=E4+C5** ».
3. On peut conjecturer qu'après un grand nombre d'étapes l'épargne totale générée sera de 100000€ et le revenu total généré sera d'environ 333333,33€.

Partie B - Avec des suites

1. (a) Comme l'épargne supplémentaire représente toujours 30% des dépenses des entreprises à chaque étape, et que cette dépense diminue de 30% à chaque étape, l'épargne supplémentaire de l'étape $(n+1)$ représente 70% de celle de l'étape n. La suite (e_n) est donc géométrique de raison $q = 0{,}7$ et de premier terme $e_1 = 30$.
   On a donc, pour $n \geqslant 1$, $e_n = e_1 \times q^{n-1} = 30 \times 0{,}7^{n-1}$.

   (b) On a, pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} E_n &= e_1 + e_2 + \ldots + e_n \\ &= e_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} \\ &= 30 \times \frac{1-0{,}7^n}{1-0{,}7} \\ &= \frac{30}{0{,}3} \times (1-0{,}7^n) \\ &= 100(1-0{,}7^n) \end{aligned}$$

   (c) Lorsque n devient très grand, E_n semble se rapprocher de 100 k€.

2. Comme le revenu supplémentaire représente toujours 70% des dépenses des entreprises à chaque étape, et que cette dépense diminue de 30% à chaque étape, le revenu supplémentaire de l'étape $(n+1)$ représente 70% de celui de l'étape n. La suite (r_n) est donc géométrique de raison $q = 0{,}7$ et de premier terme $r_0 = 100$. On a donc, pour $n \geqslant 0$, $r_n = e_0 \times q^n = 100 \times 0{,}7^n$.
   On a, pour $n \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} R_n = r_0 + r_1 + \ldots + r_n &= r_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \\ &= 100 \times \frac{1-0{,}7^{n+1}}{1-0{,}7} \\ &= \frac{100}{0{,}3} \times (1-0{,}7^{n+1}) \\ &= \frac{1000}{3}(1-0{,}7^{n+1}) \end{aligned}$$

   Lorsque n devient très grand, R_n semble se rapprocher de $\frac{1000}{3} \approx 333{,}33$ k€.

Partie C - Généralisation

1. Comme l'épargne supplémentaire représente toujours une proportion $(1-c)$ des dépenses des entreprises à chaque étape, et que cette dépense diminue d'une proportion $(1-c)$ à chaque étape, l'épargne supplémentaire de l'étape $(n+1)$ représente c fois celle de l'étape n. La suite (e_n) est donc géométrique de raison c et de premier terme $e_1 = (1-c) \times \mathrm{I}$.

   On a donc, pour $n \geqslant 1$, $e_n = e_1 \times c^{n-1} = (1-c) \times \mathrm{I} \times c^{n-1}$.

   Comme le revenu supplémentaire représente toujours une proportion c des dépenses des entreprises à chaque étape, et que cette dépense diminue d'une proportion $(1-c)$ à chaque étape, le revenu supplémentaire de l'étape $(n+1)$ représente c fois celui de l'étape n. La suite (r_n) est donc géométrique de raison c et de premier terme $r_0 = \mathrm{I}$.

   On a donc, pour $n \geqslant 0$, $r_n = r_0 \times c^n = \mathrm{I} \times c^n$.

2. La somme R_n du total des revenus engendrés à l'étape n vaut :

$$\begin{aligned} R_n &= r_0 + r_1 + \ldots + r_n \\ &= r_0 \times \frac{1-c^{n+1}}{1-c} \\ &= \mathrm{I} \times \frac{1-c^{n+1}}{1-c} \end{aligned}$$

   Or, lorsque n devient grand, c^{n+1} se rapproche de 0 donc R_n se rapproche de $\mathrm{I} \times \dfrac{1}{1-c}$.

3. La somme E_n de l'épargne totale engendrée à l'étape n vaut :

$$\begin{aligned} E_n &= e_1 + e_2 + \ldots + e_n \\ &= e_1 \times \frac{1-c^n}{1-c} \\ &= (1-c)\mathrm{I} \times \frac{1-c^n}{1-c} \\ &= \mathrm{I} \times (1-c^n) \end{aligned}$$

   Or, lorsque n devient grand, c^n se rapproche de 0 donc E_n se rapproche de I : la somme de l'épargne engendrée tendra toujours vers l'investissement initial.