Devoir Surveillé 3 - Correction

Exercice 1

Exercice adapté du sujet de baccalauréat Antilles-Guyane (22 juin 2016)

1. Si l'on part de la quantité de polluants émise en 2013, qui est de 410 tonnes, et qu'on applique deux baisses successives de 10%, on obtient alors :

   $$410 \times 0{,}9 \times 0{,}9 = 332{,}1.$$

   Ainsi, on peut modéliser l'évolution d'une année sur l'autre par une diminution de 10%.

2.

   $U \longleftarrow 410$
   Pour i allant de 1 à N
   $|U \longleftarrow U \times 0{,}9$
   Fin Pour

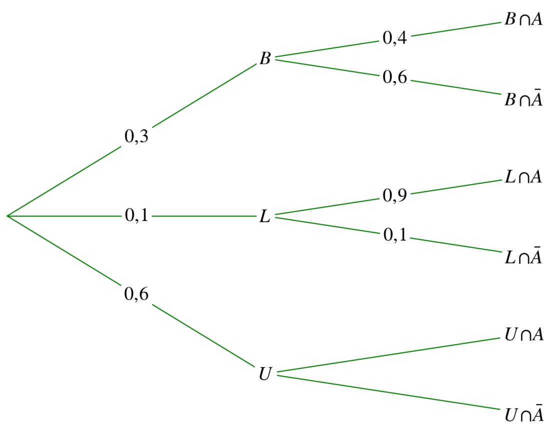
3. Après utilisation de l'algorithme, on détermine que c'est 8 ans après 2013, soit en 2021, que la quantité de polluants rejetés par ces entreprises passera sous le seuil de 180 tonnes.

   Autre méthode : On note u_n la quantité de polluants, en tonne, émise par les entreprises en $(2013 + n)$. D'après la modélisation, (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 410$ et de raison $q = 0{,}9$. Comme $0 < q < 1$, la suite (u_n) est strictement décroissante.
   De plus, $u_7 \approx 196{,}1$ et $u_8 \approx 176{,}5$: le seuil de 180 tonnes est donc franchi au bout de 8 ans, en 2021.

Exercice 2

Exercice adapté du sujet de baccalauréat Antilles-Guyane (22 juin 2016)

1.



2. La probabilité que le client ait loué une berline et ait choisi l'option d'assurance sans franchise est la suivante :

$$\mathrm{P}(B \cap A) = \mathrm{P}(B) \times \mathrm{P}_B(A) = 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}12.$$

3. B, L et U forment une partition de l'univers. En vertu de la loi des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A) &= \mathrm{P}(B \cap A) + \mathrm{P}(L \cap A) + \mathrm{P}(U \cap A) \\ &= 0{,}12 + 0{,}09 + 0{,}21 \\ &= 0{,}42 \end{aligned}$$

   La probabilité que le client ait choisi l'option d'assurance sans franchise est $\mathrm{P}(A) = 0{,}42$.

4. D'après le cours :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_L(A) &= \frac{\mathrm{P}(\mathrm{L} \cap \mathrm{A})}{\mathrm{P}(L)} \\ &= \frac{0{,}09}{0{,}01} \\ &= 0{,}9 \end{aligned}$$

   La probabilité que le client ait souscrit une assurance sans franchise sachant qu'il a loué une voiture de luxe est $\mathrm{P}_L(A) = 0{,}9$.

Exercice 3

1. Le montant des coûts fixes de cette entreprise correspond au montant du coût total lorsque aucun cerf-volant n'est produit, donc à :

$$C_T(0) = \frac{1}{3} \times 0^3 - \frac{1}{4} \times 0^2 - \frac{1}{2} \times 0 + 2 = 2.$$

   Les coûts fixes de l'entreprise s'élèvent à 2000€.

2. (a) Pour tout nombre $x \in [0\,;6]$, on a :

$$\begin{aligned} C_T'(x) &= \frac{1}{3} \times 3x^2 - \frac{1}{4} \times 2x - \frac{1}{2} \times 1 + 0 \\ &= x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} (x-1) \times \left(x + \frac{1}{2}\right) &= x^2 + \frac{1}{2}x - x - \frac{1}{2} \\ &= x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   On a bien, pour tout nombre $x \in [0\,;6]$:

$$C_T'(x) = (x-1) \times \left(x + \frac{1}{2}\right).$$

(b) Pour étudier les variations de C_T sur l'intervalle $[0\,;6]$, on doit étudier le signe de $C'_T(x)$ sur cet intervalle.

On résout :

$$\begin{aligned} C'_T(x) = 0 &\iff (x-1) \times \left(x + \frac{1}{2}\right) \\ &\iff x - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x + \frac{1}{2} = 0 \\ &\iff x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

On dresse le tableau de signes suivants, duquel on déduit le tableau de variations de C_T :

x	0		1		6
Signe de $(x-1)$		$-$	0	$+$	
Signe de $\left(x+\frac{1}{2}\right)$		$+$		$+$	
Signe de $C'_T(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de C_T	2	$\searrow$	$\frac{19}{12}$	$\nearrow$	62

Calculs :

- $C_T(1) = \dfrac{1}{3} \times 1^3 - \dfrac{1}{4} \times 1^2 - \dfrac{1}{2} \times 1 + 2 = \dfrac{19}{12} \approx 1{,}583\,;$
- $C_T(6) = \dfrac{1}{3} \times 6^3 - \dfrac{1}{4} \times 6^2 - \dfrac{1}{2} \times 6 + 2 = 62.$

(c) Le maximum de la fonction C_T sur l'intervalle $[0\,;1]$ vaut 2 donc l'équation $C_T(x) = 50$ n'y admet aucune solution.

La fonction C_T est continue (en tant que polynôme) et strictement croissante sur l'intervalle $[1\,;6]$; elle y varie entre $C_T(1) < 50$ et $C_T(6) > 50$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $C_T(x) = 50$ y admet une unique solution β.

En s'aidant de la calculatrice, on trouve : $5{,}603 < \beta < 5{,}604$. Le nombre maximal de cerf-volants produit par l'entreprise est de 5603.

3. (a) L'expression du coût moyen de production est :

$$\begin{aligned} C_M(x) &= \frac{C_T(x)}{x} \\ &= \frac{\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 2}{x} \\ &= \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} + \frac{2}{x} \end{aligned}$$

(b) Pour tout $x \in [0{,}001\,;6]$, on a :

$$\begin{aligned} C'_M(x) &= \frac{1}{3} \times 2x - \frac{1}{4} \times 1 - 0 - \frac{2}{x^2} \\ &= \frac{2x}{3} - \frac{1}{4} - \frac{2}{x^2} \\ &= \frac{2x \times 4x^2}{3 \times 4x^2} - \frac{1 \times 3x^2}{4 \times 3x^2} - \frac{2 \times 12}{x^2 \times 12} \\ &= \frac{8x^3 - 3x^2 - 24}{12x^2} \end{aligned}$$

(c) Pour étudier les variations de f sur $[0{,}001\,;6]$, on détermine l'expression de sa dérivée :

$$f'(x) = 8 \times 3x^2 - 3 \times 2x - 0 = 24x^2 - 6x = 6x(4x-1).$$

On résout alors :

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff 6x(4x-1) = 0 \\ &\iff 6x = 0 \quad \text{ou} \quad 4x - 1 = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

On en tire le tableau de signes de $f'(x)$ et de variations de f sur $[0{,}001\,;6]$:

x	0.001		0.25		6
Signe de $6x$		$+$		$+$	
Signe de $(4x-1)$		$-$	0	$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$f(0.001)$	↘	$f(0.25)$	↗	1596

Calculs :

- $f(0{,}001) = 8 \times 0{,}001^3 - 3 \times 0{,}001^2 - 24 \approx -24$;
- $f(0{,}25) = 8 \times 0{,}25^3 - 3 \times 0{,}25^2 - 24 = -24{,}0625$;
- $f(6) = 8 \times 6^3 - 3 \times 6^2 - 24 = 1596$.

(d) Le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0{,}001\,;0{,}25]$ vaut $f(0{,}001) < 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'y admet aucune solution.

La fonction f est continue (en tant que polynôme) et strictement croissante sur l'intervalle $[0{,}25\,;6]$; elle y varie entre $f(0{,}25) < 0$ et $f(6) > 0$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ y admet une unique solution α.

En s'aidant de la calculatrice, on trouve : $\alpha \approx 1{,}579$.

(e) On en déduit que la production pour laquelle le coût moyen par cerf-volant est minimal est de 1579 cerf-volants. Le coût moyen minimal est alors de $C_M(\alpha) \approx 1{,}20$€ par cerf-volant.