

Chapitre 4

Fonctions exponentielles

4.1 Fonction $x \mapsto q^x$ avec $q > 0$

4.1.1 Généralités

Définition. Si q est un nombre réel strictement positif, alors la fonction qui, à tout nombre entier naturel n , fait correspondre q^n , se prolonge en une fonction définie sur \mathbb{R} .

L'image d'un nombre réel x est notée q^x .

La fonction $x \mapsto q^x$ est appelée **fonction exponentielle de base q** .

Propriétés. Si q est un nombre réel strictement positif alors :

- les fonctions exponentielles sont dérivables et continues sur \mathbb{R} ;
- pour tout nombre réel x , q^x est strictement positif ;
- si $0 < q < 1$ alors la fonction $x \mapsto q^x$ est strictement décroissante ;
- si $q > 1$ alors la fonction $x \mapsto q^x$ est strictement croissante ;
- si $q = 1$ alors la fonction $x \mapsto q^x$ est constante, et égale à 1.

Exemple. La fonction exponentielle de base 0,7 est définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 0,7^x$.

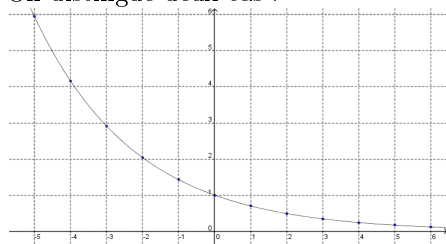
Elle est continue et dérivable sur \mathbb{R} . Pour tout nombre réel x , on a : $0,7^x > 0$. De plus, comme $0 < 0,7 < 1$, la fonction f est strictement décroissante.

Exemple. La fonction exponentielle de base 1,7 est définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = 1,7^x$.

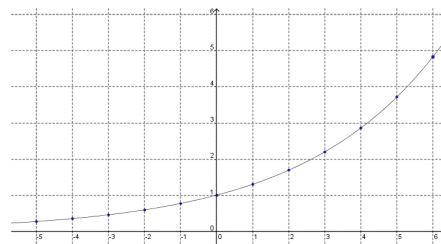
Elle est continue et dérivable sur \mathbb{R} . Pour tout nombre réel x , on a : $1,7^x > 0$. De plus, comme $1,7 > 1$, la fonction g est strictement croissante.

4.1.2 Représentation graphique

On distingue deux cas :



Cas où $0 < q < 1$



Cas où $q > 1$

Ces courbes résument certaines propriétés énoncées précédemment : continuité, stricte monotonie (selon la valeur de q), positivité, et enfin le fait que $q^0 = 1$.

4.2 La relation fonctionnelle

Propriété. Les fonctions exponentielles de base $q > 0$ vérifient la propriété suivante, pour tous nombres réels x et y :

$$q^x \times q^y = q^{x+y}.$$

Exemples.

- $1,7^{4,1} \times 1,7^{2,7} = 1,7^{4,1+2,7} = 1,7^{6,8}$.
- $0,6^{-2,3} \times 0,6^{-1} = 0,6^{-2,3-1} = 0,6^{-3,3}$.
- $\sqrt{3}^{1,7} \times \sqrt{3}^{-0,7} = \sqrt{3}^{1,7-0,7} = \sqrt{3}^1 = \sqrt{3}$.

Conséquences. On tire de cette relation les propriétés suivantes, valables pour tous nombres réels strictement positifs q et r , et tous nombres réels a et b :

- $q^{-a} = \frac{1}{q^a}$;
- $q^a \times r^a = (q \times r)^a$;
- $(q^a)^b = q^{a \times b}$;
- $\frac{q^a}{q^b} = q^{a-b}$;
- $q^{\frac{1}{2}} = \sqrt{q}$.