Chapitre 4 - Fonctions exponentielles

Paul DARTHOS

Lycée Jaufré RUDEL - BLAYE

4 novembre 2017

▸ Une famille de fonctions

Définition des fonctions exponentielles

Définition

Si q est un nombre réel strictement positif, alors la fonction qui, à tout nombre entier naturel n, fait correspondre q^n, se prolonge en une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
L'image d'un nombre réel x est notée q^x.
La fonction $x \mapsto q^x$ est appelée ***fonction exponentielle de base*** *q.*

Propriétés des fonctions exponentielles

Propriétés

Si q est un nombre réel strictement positif alors :

- *les fonctions exponentielles sont dérivables et continues sur* $\mathbb{R}$ *;*
- *pour tout nombre réel* x, q^x *est strictement positif ;*
- *si* $0 < q < 1$ *alors la fonction* $x \mapsto q^x$ *est strictement décroissante ;*
- *si* $q > 1$ *alors la fonction* $x \mapsto q^x$ *est strictement croissante ;*
- *si* $q = 1$ *alors la fonction* $x \mapsto q^x$ *est constante, égale à* 1.

Exemples de fonctions exponentielles

Exemple

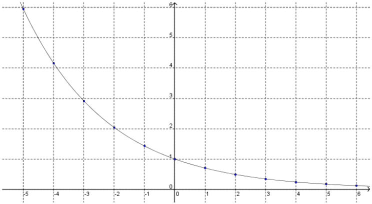
La fonction exponentielle de base $0{,}7$ *est définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*
$f(x) = 0{,}7^x$.
Elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. *Pour tout nombre réel* x, *on a :* $0{,}7^x > 0$. *De plus, comme* $0 < 0{,}7 < 1$, *la fonction* f *est strictement décroissante.*

Exemple

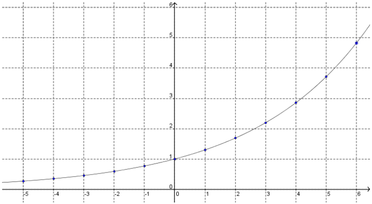
La fonction exponentielle de base $1{,}7$ *est définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*
$g(x) = 1{,}7^x$.
Elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. *Pour tout nombre réel* x, *on a :* $1{,}7^x > 0$. *De plus, comme* $1{,}7 > 1$, *la fonction* g *est strictement croissante.*

Courbes des fonctions exponentielles

On distingue deux cas :



Cas où $0 < q < 1$



Cas où $q > 1$

Ces courbes résument certaines propriétés énoncées précédemment : continuité, stricte monotonie (selon la valeur de q), positivité, et enfin le fait que $q^0 = 1$.

La relation fonctionnelle

Propriété

Les fonctions exponentielles de base $q > 0$ vérifient la propriété suivante, pour tous nombres réels x et y :

$$q^x \times q^y = q^{x+y}.$$

Exemples de calcul

Exemples

- $1{,}7^{4{,}1} \times 1{,}7^{2{,}7} = 1{,}7^{4{,}1+2{,}7} = 1{,}7^{6{,}8}$.
- $0{,}6^{-2{,}3} \times 0{,}6^{-1} = 0{,}6^{-2{,}3-1} = 0{,}6^{-3{,}3}$.
- $\left(\sqrt{3}\right)^{1{,}7} \times \left(\sqrt{3}\right)^{-0{,}7} = \left(\sqrt{3}\right)^{1{,}7-0{,}7} = \left(\sqrt{3}\right)^{1} = \sqrt{3}$.

Conséquences de la relation fonctionnelle

Conséquences

On tire de cette relation les propriétés suivantes, valables pour tous nombres réels strictement positifs q et r, et tous nombres réels a et b :

- $q^{-a} = \frac{1}{q^a}$;
- $q^a \times r^a = (q \times r)^a$;
- $(q^a)^b = q^{a \times b}$;
- $\dfrac{q^a}{q^b} = q^{a-b}$;
- $q^{\frac{1}{2}} = \sqrt{q}$.