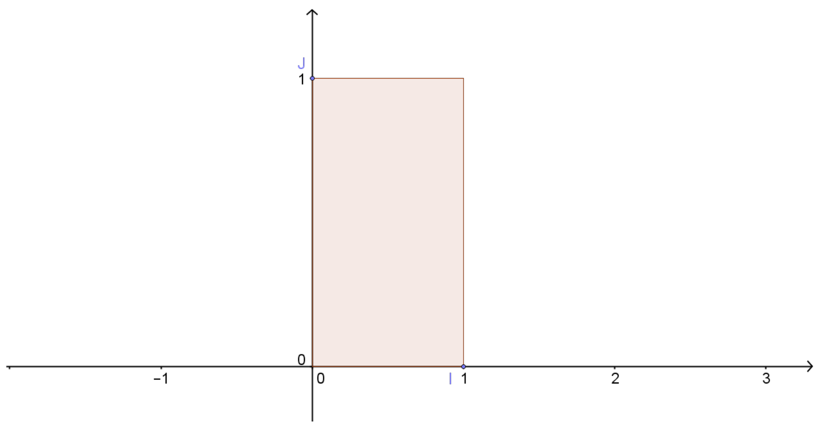
Chapitre 5

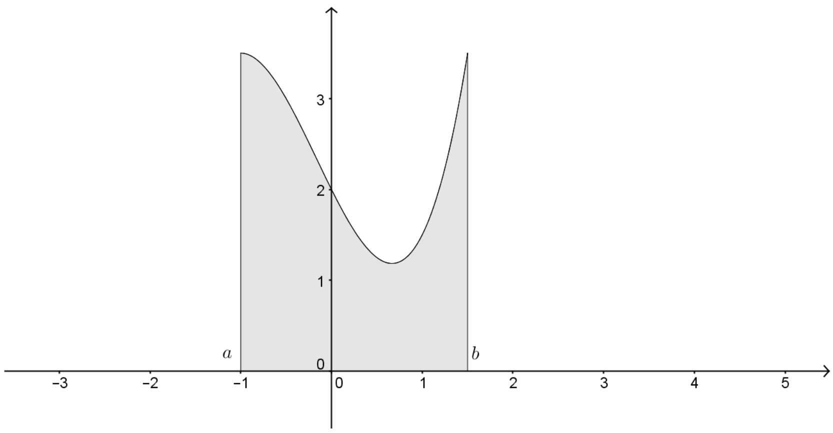
Intégration (partie 1)

5.1 Intégrale d'une fonction positive

Définition. *On se place dans le plan muni d'un repère orthonormal* $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$. *On appelle alors* ***unité d'aire*** *l'aire du rectangle de côtés* $[\mathrm{OI}]$ *et* $[\mathrm{OJ}]$.



Définition. *Si f est une fonction définie, continue et à valeurs positives sur un intervalle $[a\,;b]$ (où $a < b$) et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$, alors l'**intégrale de f entre a et b** est l'aire (exprimée en unités d'aire) de la surface délimitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses (OI) et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$.*

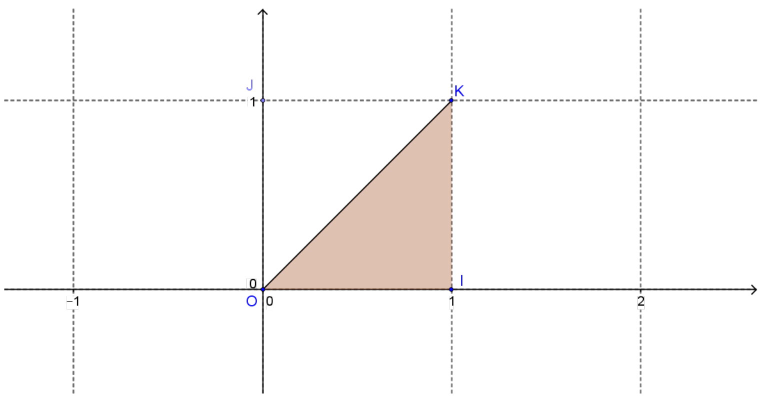


Cette aire est appelée « aire sous la courbe de f ».
On la note également $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, appelée « intégrale de a à b de f ».
*a est la **borne inférieure** et b la **borne supérieure** de cette intégrale.*

Exemple. *f est la fonction définie sur $[0\,;1]$ par : $f : x \mapsto x$. Elle y est clairement continue et positive.*

L'intégrale de 0 à 1 de cette fonction est alors l'aire de la surface entre $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Dans le dessin ci-dessous, il s'agit donc de l'aire du triangle OIK, *avec* $\mathrm{K}(1\,;1)$.



On a donc : $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$.

Propriétés.

- *L'intégrale d'une fonction à valeurs positives entre a et b, où $a < b$, est positive.*
- *Si $f : x \mapsto k$ est une fonction constante sur $[a\,;b]$ (où $k > 0$), alors :* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = k(b-a)$.

5.2 Primitives d'une fonction continue

5.2.1 Généralités

Définition. *Si f est une fonction définie et continue sur un intervalle I, alors on appelle* ***primitive de f sur*** *I une fonction F dérivable sur I dont la dérivée est égale à f. On a alors : $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$.*

Exemple. $F(x) = \dfrac{x^2}{2}$ *est une primitive de $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$, car* $F'(x) = \dfrac{2x}{2} = x$.

Théorème. *Toute fonction f définie et continue sur un intervalle I admet des primitives sur cet intervalle.*

Propriétés. *Si f est une fonction définie et continue sur un intervalle I, alors :*

- *Si F est une primitive de f sur cet intervalle, alors toutes les primitives de f sont les fonctions F_k définies sur I par : $F_k(x) = F(x)+k$, où k désigne un nombre réel quelconque.*
- *Il existe une unique primitive F de f qui prend la valeur y_0 en x_0 (où $x_0 \in I$ et y_0 sont des nombres réels fixés).*

5.2.2 Primitives des fonctions usuelles

Fonction f	Une primitive F	Intervalle
$f(x) = a$	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$F(x) = \dfrac{-1}{x}$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$]0\,;+\infty[$

Propriétés. *Si f et g sont deux fonctions définies et continues sur un intervalle I de primitives respectives F et G, et k un nombre réel quelconque, alors :*

- *une primitive de kf est kF ;*
- *une primitive de $f+g$ est $F+G$.*

Exemples.

- *Si $f : x \mapsto x^3$, alors une primitive de f est :* $F(x) = \dfrac{x^4}{4}$.
- *Si $g : x \mapsto 2x+5$, alors une primitive de g est :* $G(x) = x^2 + 5x$.