Chapitre 5 - Intégration (partie 1)

Paul DARTHOS

Lycée Jaufré RUDEL - BLAYE

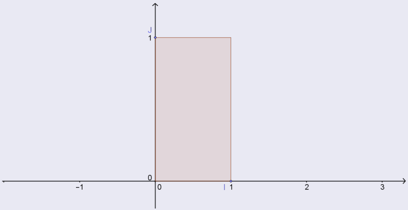
4 novembre 2017

Calculons des aires

Unité d'aire

Définition

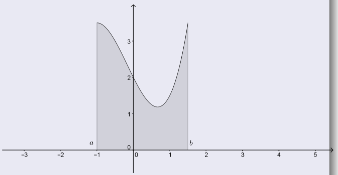
On se place dans le plan muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$*. On appelle alors* ***unité d'aire*** *l'aire du rectangle de côtés* $[\mathrm{OI}]$ *et* $[\mathrm{OJ}]$*.*



Intégrale d'une fonction positive

Définition

Si f est une fonction définie, continue et à valeurs positives sur un intervalle $[a\,;b]$ (où $a < b$) et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$,



*alors l'**intégrale de f entre a et b** est l'aire (exprimée en unités d'aire) de la surface délimitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. Cette aire est appelée « aire sous la courbe de f ».*

On la note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, appelée « intégrale de a à b de f ».

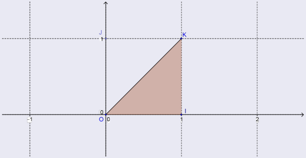
*a en est la **borne inférieure** et b la **borne supérieure**.*

Un exemple de calcul graphique

Exemple

f est la fonction définie sur $[0\,;1]$ par : $f : x \mapsto x$. Elle y est clairement continue et positive.

L'intégrale de 0 à 1 de cette fonction est alors l'aire de la surface entre $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.



Dans le dessin ci-dessus, il s'agit donc de l'aire du triangle OIK, avec $\mathrm{K}(1\,;1)$.

On a donc : $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} = 0{,}5.$

Propriétés de l'intégrale

Propriétés

- *L'intégrale d'une fonction à valeurs positives entre a et b, où $a < b$, est positive.*
- *Si $f : x \mapsto k$ est une fonction constante sur $[a\,;b]$ (où $k > 0$), alors :* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = k(b-a)$.

Primitive d'une fonction continue

Définition

Si f est une fonction définie et continue sur un intervalle I, alors on appelle ***primitive de f sur I*** *une fonction F dérivable sur I dont la dérivée est égale à f. On a alors :* $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$.

Exemple

$F(x) = \dfrac{x^2}{2}$ *est une primitive de* $f(x) = x$ *sur* $\mathbb{R}$*, car*
$F'(x) = \dfrac{2x}{2} = x$.

Théorème sur les primitives

Théorème

Toute fonction f définie et continue sur un intervalle I admet des primitives sur cet intervalle.

Propriétés sur les primitives

Propriétés

Si f est une fonction définie et continue sur un intervalle I, alors :

- *Si F est une primitive de f sur cet intervalle, alors toutes les primitives de f sont les fonctions F_k définies sur I par : $F_k(x) = F(x) + k$, où k désigne un nombre réel quelconque.*
- *Il existe une unique primitive F de f qui prend la valeur y_0 en x_0 (où $x_0 \in I$ et y_0 sont des nombres réels fixés).*

Primitives usuelles

Fonction f	Une primitive F	Intervalle
$f(x) = a$	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$F(x) = \dfrac{-1}{x}$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$]0\,;+\infty[$

Propriétés de calcul de primitives

Propriétés

Si f et g sont deux fonctions définies et continues sur un intervalle I de primitives respectives F et G, et k un nombre réel quelconque, alors :

- *une primitive de kf est kF ;*
- *une primitive de $f + g$ est $F + G$.*

Exemples de calcul de primitives

Exemples

- *Si* $f : x \mapsto x^3$, *alors une primitive de* f *est :* $F(x) = \dfrac{x^4}{4}$.
- *Si* $g : x \mapsto 2x + 5$, *alors une primitive de* g *est :* $G(x) = x^2 + 5x$.