Chapitre 6

La fonction exponentielle

6.1 Généralités

6.1.1 Définition et propriétés

Définition. *On appelle* ***fonction exponentielle*** *l'unique fonction exponentielle ayant* 1 *comme nombre dérivé en* 0.

On la note $x \mapsto \mathrm{e}^x$ *ou bien* $x \mapsto \exp(x)$.

Notations.

- *L'image de* 1 *par la fonction exponentielle est notée* e.
- *La fonction exponentielle est une fonction exponentielle dont la base est* e.
- e *est un nombre réel, dont une valeur approchée est :* 2,718.

Propriétés.

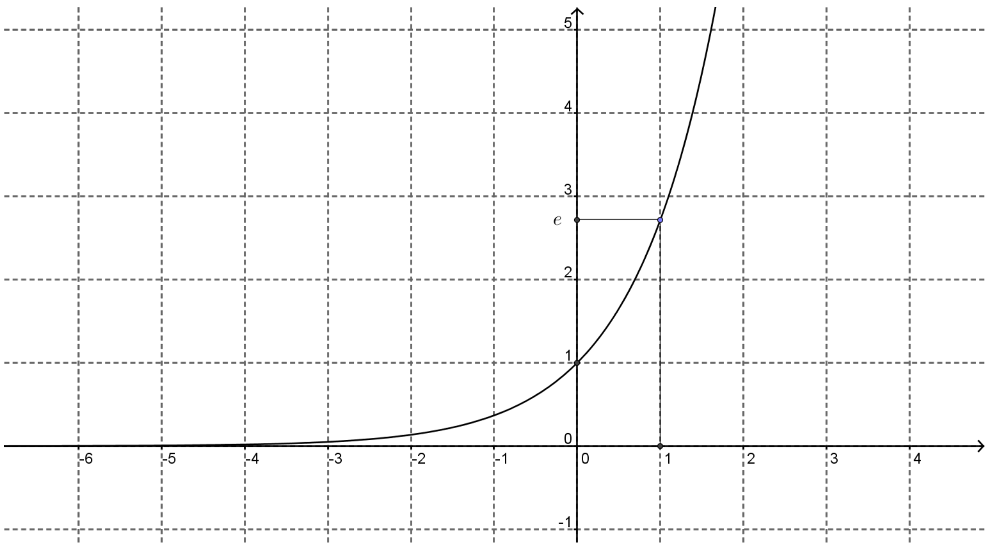
- *La fonction exponentielle est continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$.
- *Sa dérivée est elle-même :* $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$ *ou, écrit autrement :* $\exp'(x) = \exp(x)$.
- *La fonction exponentielle est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *car* $\mathrm{e} > 1$.

Propriétés. *Comme pour toutes les fonctions exponentielles, on a les propriétés :*

- $\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{x+y}$;
- $\mathrm{e}^{-a} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^a}$;
- $(\mathrm{e}^a)^b = \mathrm{e}^{a \times b}$;
- $\dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} = \mathrm{e}^{a-b}$;
- $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}}$.

6.1.2 Représentation graphique

Une représentation graphique de la fonction exponentielle est la suivante :



6.2 Composées de la fonction exponentielle

6.2.1 Fonctions de la forme e^u

Si u est une fonction définie sur un intervalle I alors, l'image de tout nombre réel x de I par u étant notée $u(x)$, on peut noter l'image de ce même nombre par e^u de la façon suivante : $\mathrm{e}^{u(x)}$.

Cela définit une fonction sur I, que l'on note e^u.

Exemples. *Si l'on considère la fonction $u : x \mapsto -2x+3$, alors on a : $\mathrm{e}^u : x \mapsto \mathrm{e}^{-2x+3}$.*

De même, si l'on considère la fonction $v(x) = 3x^2$, alors on a : $\mathrm{e}^{v(x)} = e^{3x^2}$.

Propriété. *Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors :*

- *La fonction e^u est dérivable sur I, et sa dérivée est la fonction : $u'\mathrm{e}^u$.*
- *La fonction e^u a le même sens de variation que la fonction u.*

Exemple. *Considérons la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$, définie sur $\mathcal{D}_f =]0\,;+\infty[$.*

Elle est du type e^u, avec $u(x) = \dfrac{1}{x}$.

Comme u est strictement décroissante sur $\mathcal{D}_f$, alors f est strictement décroissante sur cet intervalle.

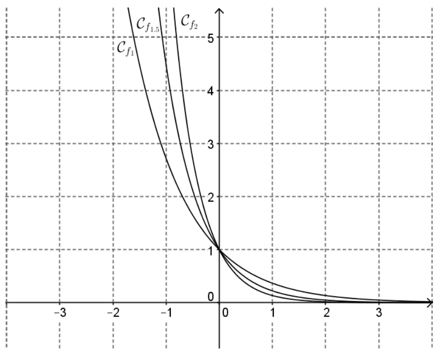
De plus, $f'(x) = u'\mathrm{e}^u = \dfrac{-1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

6.2.2 Cas particuliers

De nombreux problèmes de statistiques, d'économie ou de probabilités nous conduisent à l'étude de fonctions du type $x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$. Deux cas particuliers de fonctions sont souvent rencontrés :

Fonctions $f_k : x \mapsto \mathrm{e}^{-kx}$ avec $k > 0$:

Ces fonctions sont positives, et strictement décroissantes car $f'_k(x) = -k\mathrm{e}^{-kx}$, or $k > 0$ donc $f'_k(x) < 0$.



Fonctions $g_k : x \mapsto \mathrm{e}^{-kx^2}$ avec $k > 0$:

Ces fonctions sont positives, strictement croissantes sur $]-\infty\,;0]$ et strictement décroissantes sur $[0\,;+\infty[$ car $f'_k(x) = -2kx\mathrm{e}^{-kx}$, or $k > 0$ donc $f'_k(x) > 0$ si $x < 0$, et $f'_k(x) < 0$ si $x > 0$. Elles admettent 1 comme maximum en $x = 0$.