

Chapitre 6 - La fonction exponentielle

Paul DARTHOS

Lycée Jauféré RUDEL - BLAYE

4 novembre 2017

► Un cas particulier

La fonction exponentielle

Définition

On appelle **fonction exponentielle** l'unique fonction exponentielle ayant 1 comme nombre dérivé en 0.

On la note $x \mapsto e^x$ ou bien $x \mapsto \exp(x)$.

Notations sur la fonction exponentielle

Notations

- *L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée e .*
- *La fonction exponentielle est une fonction exponentielle dont la base est e .*
- *e est un nombre réel, dont une valeur approchée est : 2,718.*

Propriétés sur la fonction exponentielle

Propriétés

- *La fonction exponentielle est continue et dérivable sur \mathbb{R} .*
- *Sa dérivée est elle-même : $(e^x)' = e^x$ ou, écrit autrement : $\exp'(x) = \exp(x)$.*
- *La fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} car $e > 1$.*

Propriétés de calcul d'exponentielles

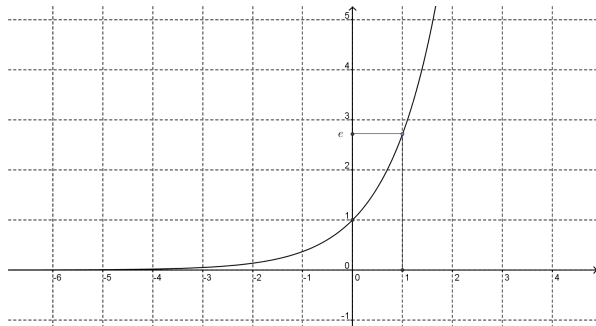
Propriétés

Comme pour toutes les fonctions exponentielles, on a les propriétés :

- $e^x \times e^y = e^{x+y}$;
- $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$;
- $(e^a)^b = e^{a \times b}$;
- $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$;
- $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

Représentation de la fonction exponentielle

Une représentation graphique de la fonction exponentielle est la suivante :



Fonctions de la forme e^u

Si u est une fonction définie sur un intervalle I alors, l'image de tout nombre réel x de I par u étant notée $u(x)$, on peut noter l'image de ce même nombre par e^u de la façon suivante : $e^{u(x)}$. Cela définit une fonction sur I , que l'on note e^u .

Exemples de la forme e^u

Exemples

Si l'on considère la fonction $u : x \mapsto -2x + 3$, alors on a :
 $e^u : x \mapsto e^{-2x+3}$.

De même, si l'on considère la fonction $v(x) = 3x^2$, alors on a :
 $e^{v(x)} = e^{3x^2}$.

Propriétés des fonctions e^u

Propriété

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , alors :

- *La fonction e^u est dérivable sur I , et sa dérivée est la fonction : $u'e^u$.*
- *La fonction e^u a le même sens de variation que la fonction u .*

Exemple d'étude de fonctions e^u

Exemple

Considérons la fonction $f : x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$, définie sur $\mathcal{D}_f =]0 ; +\infty[$.

Elle est du type e^u , avec $u(x) = \frac{1}{x}$.

Comme u est strictement décroissante sur \mathcal{D}_f , alors f est strictement décroissante sur cet intervalle.

De plus, $f'(x) = u'e^u = \frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$.

Cas particuliers de fonctions e^u

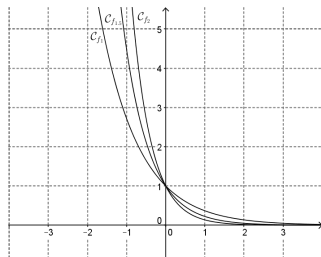
De nombreux problèmes de statistiques, d'économie ou de probabilités nous conduisent à l'étude de fonctions du type $x \mapsto e^{u(x)}$. Deux cas particuliers de fonctions sont souvent rencontrés.

Fonctions $f_k : x \mapsto e^{-kx}$ avec $k > 0$

Ces fonctions sont positives, et strictement décroissantes car

$$f'_k(x) = -ke^{-kx}, \text{ or } k > 0$$

$$\text{donc } f'_k(x) < 0.$$



Fonctions $g_k : x \mapsto e^{-kx^2}$ avec $k > 0$

Ces fonctions sont positives, strictement croissantes sur $] -\infty ; 0]$ et strictement décroissantes sur $[0 ; +\infty [$ car $f'_k(x) = -2kxe^{-kx}$, or $k > 0$ donc $f'_k(x) > 0$ si $x < 0$ et $f'_k(x) < 0$ si $x > 0$.

Elles admettent 1 comme maximum en $x = 0$.

