Chapitre 7

Lois à densité, loi uniforme

7.1 Lois à densité

7.1.1 Variable aléatoire à densité

Jusqu'à présent, les variables aléatoires étudiées ne pouvaient prendre qu'un nombre **fini** de valeurs. On parlait alors de **variable aléatoire discrète**.

Nous allons maintenant nous intéresser à des variables aléatoires pouvant prendre en théorie **toute** valeur d'un intervalle réel I. On parlera ici de **variable aléatoire continue**.

Définition. *On appelle **fonction de densité de probabilité** sur l'intervalle I toute fonction f définie, continue et positive sur I telle que l'intégrale sur I de f soit égale à 1 :* $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Définition. *Une **variable aléatoire à densité** X sur un intervalle I est définie à partir d'une fonction de densité de probabilité f définie sur I. La probabilité pour que X appartienne à un intervalle $[a\,;b]$ inclus dans I est égale à l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_f$ entre a et b. On la note $\mathrm{P}(a \leqslant X \leqslant b)$.*

Ainsi, le domaine compris entre $\mathcal{C}_f$ et l'axe des abscisses a pour aire totale $\mathrm{P}(X \in I) = 1$.

Propriétés. *Si a et b sont deux nombres réels de l'intervalle I alors :*

- $\mathrm{P}(a < X < b) = \mathrm{P}(X < b) - \mathrm{P}(X \leqslant a)$;
- $\mathrm{P}(X < b) = \mathrm{P}(X \leqslant b)$;
- $\mathrm{P}(X > a) = \mathrm{P}(X \geqslant a)$;
- $\mathrm{P}(a < X < b) = \mathrm{P}(a \leqslant X < b) = \mathrm{P}(a < X \leqslant b) = \mathrm{P}(a \leqslant X \leqslant b)$.

7.1.2 Espérance d'une variable à densité

Définition. *Si X est une variable aléatoire continue de fonction de densité f sur $[a\,;b]$, alors l'**espérance mathématique de** X est le nombre réel défini par :* $\mathrm{E}(X) = \displaystyle\int_a^b t \times f(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque. *Cette définition est analogue à celle étudiée précédemment sur les lois de probabilité discrètes.*

7.2 Loi uniforme sur $[a\,;b]$

Définition. *Si a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$ alors la **loi uniforme sur** $[a\,;b]$ est la loi ayant pour densité de probabilité la fonction constante f définie sur $[a\,;b]$ par :* $f(t) = \dfrac{1}{b-a}$.

Propriétés. *Si X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[a\,;b]$, alors :*

- *pour tout nombre réel $x \in [a\,;b]$, on a :* $\mathrm{P}(a \leqslant X \leqslant x) = \dfrac{x-a}{b-a}$.
- $\mathrm{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}$.