Devoir Surveillé 4

Mardi 19 décembre 2017

Exercice 1 (12 points) (**)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Dans cette partie, les réponses seront données sans justification, avec la précision permise par le graphique situé au verso de cette feuille.

Celui-ci présente dans un repère d'origine O la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;7]$.

1. *(1 point)* Encadrer par deux nombres entiers consécutifs chacune des solutions de l'équation $f(x) = 10$ sur l'intervalle $[0\,;7]$.
2. *(1 point)* Donner le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;7]$ et préciser la valeur en laquelle il est atteint.
3. *(1 point)* La valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ appartient à un seul des intervalles suivants. Lequel ?

   (a) $[9\,;17]$ (b) $[18\,;26]$ (c) $[27\,;35]$

Partie B

La courbe donnée en annexe est la représentation graphique de la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;7]$ d'expression :

$$f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x+3}.$$

On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

1. *(1 point)* Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;7]$,

$$f'(x) = (-2x+2)\mathrm{e}^{-x+3}.$$

2. *(2 points)* Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;7]$ puis en déduire le tableau de variations complet de la fonction f sur ce même intervalle.

   On calculera le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;7]$.

3. (a) *(1,5 point)* Justifier que l'équation $f(x) = 10$ admet deux solutions sur l'intervalle $[0\,;7]$ que l'on notera α et β avec $\alpha < \beta$.

   (b) *(0,5 point)* On admet que $\alpha \approx 0{,}36$ au centième près.

   Donner une valeur approchée de β au centième près.

4. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;7]$ par :

$$F(x) = (-2x-2)\mathrm{e}^{-x+3}.$$

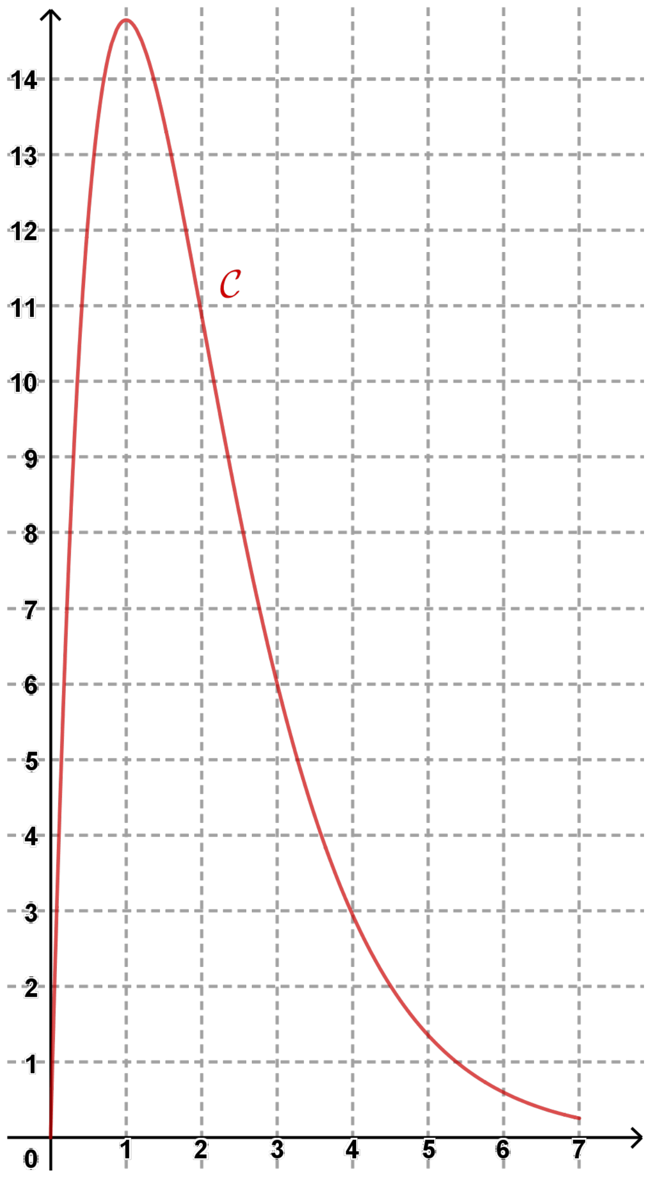
   (a) *(2 points)* Justifier que F est une primitive de f sur l'intervalle $[0\,;7]$.

(b) *(1 point)* Calculer la valeur exacte de l'aire, en unité d'aire, du domaine plan délimité par les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}$.

5. *(1 point)* La fonction f étudiée modélise le bénéfice d'une entreprise en millier d'euros réalisé pour la vente de x centaines d'objets (x étant compris entre 0 et 7).

   L'entreprise souhaite que son bénéfice soit supérieur à 10000€.

   Déterminer le nombre d'objets possibles que l'entreprise devra vendre pour atteindre son objectif.



Exercice 2 (11 points) (*)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

D'après le « bilan des examens du permis de conduire » pour l'année 2014 publiée par le Ministère de l'Intérieur en novembre 2015, 20% des personnes qui se sont présentées à l'épreuve pratique du permis de conduire avaient suivi la filière de l'apprentissage anticipé de la conduite (A.A.C.). Parmi ces candidats, 75% ont été reçus à l'examen. Pour les candidats n'ayant pas suivi la filière A.A.C., le taux de réussite à l'examen était seulement de 56,6%.

On choisit au hasard l'un des candidats à l'épreuve pratique du permis de conduire en 2014.

On considère les événements suivants :

- A : « Le candidat a suivi la filière A.A.C. »
- R : « Le candidat a été reçu à l'examen. »

On rappelle que si E et F sont deux événements, la probabilité de l'événement E est notée $\mathrm{P}(E)$ et celle de E sachant F est notée $\mathrm{P}_F(E)$. De plus, $\overline{E}$ désigne l'événement contraire de E.

1. (a) *(1,5 point)* Donner les probabilités $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}_A(R)$ et $\mathrm{P}_{\overline{A}}(R)$.
   (b) *(1 point)* Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. (a) *(1 point)* Calculer la probabilité $\mathrm{P}(A \cap R)$.
   (b) *(0,5 point)* Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.
3. *(2 points)* Justifier que $\mathrm{P}(R) = 0{,}6028$.
4. *(1 point)* Sachant que le candidat a été reçu à l'examen, calculer la probabilité qu'il ait suivi la filière A.A.C.
   On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près de cette probabilité.

Partie B

On choisit au hasard 10 candidats à l'épreuve pratique du permis de conduire en 2014. On rappelle que la probabilité que chacun d'entre eux ait été reçu à l'examen est, d'après la **partie A**, $p = 0{,}6028$.

On note X la variable aléatoire qui compte, parmi ces 10 candidats, le nombre de candidats reçus.

1. *(1 point)* Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. *(1 point)* Quelle est la probabilité que 9 candidats aient été reçus à l'examen ?
3. *(1 point)* Quelle est la probabilité qu'au moins 8 candidats aient été reçus à l'examen ?
4. *(1 point)* Calculer l'espérance de X, notée $\mathrm{E}(X)$, et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 3 (7 points) (**)

On considère la suite géométrique u de premier terme $u_0 = 50$ et de raison $q = 0{,}9$.

1. (a) *(1 point)* Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il calcule le 25ᵉ terme de la série, c'est-à-dire u_{24} :

$U \longleftarrow \ldots$
Pour i allant de 1 à …
$\|U \longleftarrow \ldots\ldots$
Fin Pour

   (b) *(1 point)* Pour tout nombre entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.

   (c) *(1 point)* Calculer u_{24} et donner une valeur approchée du résultat à 10^{-3} près.

2. *(1 point)* Déterminer le plus petit nombre entier naturel n tel que $u_n < 0{,}01$.

3. On souhaite calculer la somme $S_{24} = u_0 + u_1 + \cdots + u_{24}$.
   Voici trois propositions d'algorithmes :

Algorithme 1

$S \longleftarrow 0$
Pour N allant de 0 à 24
$\|S \longleftarrow S + 50 \times 0{,}9^N$
Fin Pour

Algorithme 2

$S \longleftarrow 0$
Pour N allant de 0 à 24
$\|S \longleftarrow 50 \times 0{,}9^N$
Fin Pour

Algorithme 3

$S \longleftarrow 50$
Pour N allant de 0 à 24
$\|S \longleftarrow S + 50 \times 0{,}9^N$
Fin Pour

   (a) *(2 point)* Un seul de ces algorithmes permet de calculer la somme u_{24} et de l'afficher. Préciser lequel en justifiant la réponse.

   (b) *(1 point)* Calculer la somme S_{24}.
   On donnera une valeur approchée du résultat à l'unité.