Devoir Surveillé 4 - Correction

Exercice 1

D'après le baccalauréat de Pondichéry - 26 avril 2017.

Partie A

1. Les solutions de l'équation $f(x) = 10$ sur l'intervalle $[0\,;7]$ sont :

$$0 < \alpha < 1 \quad \text{et} \quad 2 < \beta < 3.$$

2. Par lecture graphique, le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;7]$ semble valoir 14,8 et être atteint en $x = 1$.

3. La valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ appartient à l'intervalle $[18\,;26]$.

Partie B

1. $f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x+3} = u(x) \times v(x)$ avec : $u(x) = 2x$ donc $u'(x) = 2$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x+3}$ donc $v'(x) = -\mathrm{e}^{-x+3}$.
   On a donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= 2 \times \mathrm{e}^{-x+3} + 2x \times (-\mathrm{e}^{-x+3}) \\ &= \mathrm{e}^{-x+3}(2 - 2x) \end{aligned}$$

2. On résout l'équation :

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff (-2x + 2)\mathrm{e}^{-x+3} = 0 \\ &\iff -2x + 2 = 0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{e}^{-x+3} = 0 \\ &\iff x = 1 \end{aligned}$$

   Comme $\mathrm{e}^{-x+3} > 0$ sur $\mathbb{R}$, le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $(-2x+2)$ qui est une fonction affine de coefficient dominant négatif. On en tire le tableau suivant :

x	0		1		7
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\nearrow$	$2\mathrm{e}^2$	$\searrow$	$14\mathrm{e}^{-4}$

   Calculs :
   - $f(0) = 2 \times 0 \times \mathrm{e}^{-0+3} = 0\,;$
   - $f(1) = 2 \times 1 \times \mathrm{e}^{-1+3} = 2\mathrm{e}^2\,;$
   - $f(7) = 2 \times 7 \times \mathrm{e}^{-7+3} = 14\mathrm{e}^{-4}.$

3. (a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0\,;1]$; elle y varie entre $0 < 10$ et $2\mathrm{e}^2 > 10$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution α sur cet intervalle.

   La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[1\,;7]$; elle y varie entre $2\mathrm{e}^2 > 10$ et $14\mathrm{e}^{-4} < 10$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution β sur cet intervalle.

   (b) À l'aide de la calculatrice : $\beta \approx 2{,}16$.

4. (a) $F(x) = (-2x-2)\mathrm{e}^{-x+3} = u(x) \times v(x)$ avec : $u(x) = -2x-2$ donc $u'(x) = -2$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x+3}$ donc $v'(x) = -\mathrm{e}^{-x+3}$.

   On a donc :

$$\begin{aligned} F'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= -2 \times \mathrm{e}^{-x+3} + (-2x-2) \times (-\mathrm{e}^{-x+3}) \\ &= \mathrm{e}^{-x+3}(-2+2x+2) \\ &= 2x\mathrm{e}^{-x+3} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

   On en conclut que F est une primitive de f sur l'intervalle $[0\,;7]$.

   (b) L'aire, en unité d'aire, du domaine plan délimité par les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}$ vaut :

$$\begin{aligned} \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x &= F(3) - F(1) \\ &= (-2 \times 3 - 2)\mathrm{e}^{-3+3} - (-2 \times 1 - 2)\mathrm{e}^{-1+3} \\ &= -8 + 4\mathrm{e}^2 \end{aligned}$$

5. Dire que le bénéfice sera supérieur à 10000€ revient à dire que $f(x) > 10$. Les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 10$ étant α et β, le bénéfice sera supérieur à 10000€ lorsque l'entreprise vendra entre 36 et 216 objets (car x est exprimé en centaines d'objets).

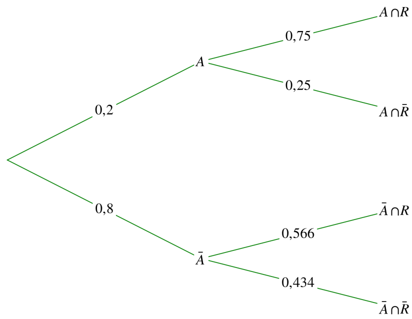
Exercice 2

D'après le baccalauréat de Polynésie - 16 juin 2017.

Partie A

1. (a) D'après l'énoncé : $\mathrm{P}(A) = 0{,}2$, $\mathrm{P}_A(R) = 0{,}75$ et $\mathrm{P}_{\overline{A}}(R) = 0{,}566$.

   (b) Voici un arbre pondéré traduisant la situation :



2. (a) On calcule : $\mathrm{P}(A \cap R) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}_A(R) = 0{,}2 \times 0{,}75 = 0{,}15$.

   (b) La probabilité que le candidat choisi au hasard ait suivi la filière A.A.C. et ait été reçu à l'examen est égale à 0,15.

3. A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers. D'après la loi des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(R) &= \mathrm{P}(A \cap R) + \mathrm{P}(\overline{A} \cap R) \\ &= 0{,}15 + 0{,}8 \times 0{,}566 \\ &= 0{,}6028 \end{aligned}$$

4. Sachant que le candidat a été reçu à l'examen, la probabilité qu'il ait suivi la filière A.A.C. vaut :

$$\mathrm{P}_R(A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap R)}{\mathrm{P}(R)} = \frac{0{,}15}{0{,}6028} \approx 0{,}2488.$$

Partie B

1. Les tirages étant assimilables à des tirages identiques et indépendants, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}6028$.

2. D'après la calculatrice, la probabilité que 9 candidats aient été reçus à l'examen vaut :

$$\mathrm{P}(X = 9) \approx 0{,}04.$$

3. D'après la calculatrice, la probabilité qu'au moins 8 candidats aient été reçus à l'examen vaut :

$$\mathrm{P}(X \geqslant 8) \approx 0{,}17.$$

4. L'espérance de X vaut : $\mathrm{E}(X) = n \times p = 0{,}6028 \times 10 = 6{,}028$.

   Cela signifie que sur les 10 candidats choisis au hasard, il y en aura en moyenne 6 qui auront été reçus à l'examen.

Exercice 3

D'après le baccalauréat de Polynésie - 4 septembre 2017.

1. (a)

$$\boxed{\begin{array}{l} U \longleftarrow 50 \\ \text{Pour } i \text{ allant de 1 à 24} \\ |U \longleftarrow U \times 0{,}9 \\ \text{Fin Pour} \end{array}}$$

   (b) Pour tout nombre entier naturel n, on a : $u_n = 50 \times 0{,}9^n$.

   (c) D'après la formule précédente, $u_{24} = 50 \times 0{,}9^{24} \approx 3{,}988$.

2. À l'aide de la calculatrice, le plus petit nombre entier naturel n tel que $u_n < 0{,}01$ est $n = 81$.

   En effet : $u_{80} \approx 0{,}0109 > 0{,}01$ et $u_{81} \approx 0{,}0092 < 0{,}01$.

3. (a) L'**algorithme 1** est le seul algorithme convenable. En effet :
   - L'**algorithme 2** ne permet pas de rajouter les valeurs successives de u_n aux précédentes, il les écrase.
   - L'**algorithme 3** ajoute la valeur 50 en trop dans la somme : elle est comptée deux fois.

   (b)

$$\begin{aligned} S_{24} &= u_0 + u_1 + \cdots + u_{24} \\ &= u_0 \times \frac{1 - 0{,}9^{25}}{1 - 0{,}9} \\ &= 50 \times \frac{1 - 0{,}9^{25}}{0{,}1} \\ &= 500 \times (1 - 0{,}9^{25}) \\ &\approx 464 \end{aligned}$$