Devoir Surveillé 5

Lundi 29 janvier 2018

Exercice 1 - Dérivation 1 (7 points) (**)

Pour chaque fonction ci-dessous :

- Déterminer soigneusement le domaine de dérivabilité de la fonction donnée.
- Déterminer une expression de la fonction dérivée de la fonction donnée.

1. *(1 point)* $f : x \mapsto 15x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 2x + 548752$.
2. *(1 point)* $g : x \mapsto 2x^2 - 4\sqrt{x} + \dfrac{13}{x}$.
3. *(2 points)* $h : x \mapsto (2x^2 - 6x + 1) \times (-3x^2 - 5x + 5)$.
4. *(3 points)* $i : x \mapsto \dfrac{12x + 3}{x^2 - 5x + 4}$.

Exercice 2 - Suites (7 points) (***)

On définit la suite (U_n) par son terme général : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$.

1. *(1 point)* Calculer les cinq premiers termes de la suite (U_n).
2. (a) *(1 point)* Calculer $(U_1 - U_0)$, $(U_2 - U_1)$, $(U_3 - U_2)$ et $(U_4 - U_3)$. Quelle conjecture peut-on faire ?

   (b) *(1 point)* Exprimer, pour tout nombre entier naturel n, la différence $(U_{n+1} - U_n)$ en fonction de n, afin de prouver la conjecture.

On définit la suite (W_n) par son terme général : $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. *(1 point)* Calculer les cinq premiers termes de la suite (W_n).
4. *(2 points)* Exprimer la différence $(W_{n+1} - W_n)$ en fonction de n, et en déduire une relation de récurrence entre W_{n+1} et W_n.
5. *(1 point)* Conclure sur les suites (U_n) et (W_n) en justifiant.

Exercice 3 - Dérivation 2 (4 points) (*)

Dans le repère fourni en **annexe**, proposer une possible représentation graphique pour la fonction f définie et dérivable sur $[-4 ; 5]$ telle que :

- $f(-4) = 2$; $f(-2) = 0$; $f(-1) = -3$; $f(2) = 1$; $f(4) = 3$ et $f(5) = -2$.
- $f'(-4) = -1$; $f'(-2) = -2$; $f'(-1) = 0$; $f'(2) = 1$; $f'(4) = -0{,}5$ et $f'(5) = -3$.

Il est impératif de faire apparaître toute trace nécessaire à la construction : points et tangentes.

Exercice 4 - Probabilités (8 points) (**)

Sur un stand de forain, une urne contient trois boules indiscernables au toucher, numérotées respectivement 1, 2 et 3. Le jeu proposé est le suivant : on verse d'abord 10€, puis on effectue trois tirages successifs d'une boule avec remise.

On obtient ainsi un nombre à trois chiffres en notant dans l'ordre les trois numéros obtenus.

- Si les trois chiffres sont identiques, on reçoit 25€.
- S'ils sont tous différents, on reçoit 15€.
- Si la somme des trois chiffres vaut 7, on reçoit 13€.
- Si la somme des trois chiffres vaut 10, on reçoit 1000€.
- Dans tous les autres cas, on ne reçoit rien.

1. *(1 point)* Donner, en le justifiant, le nombre de tirages distincts possibles.

On appelle X la variable aléatoire discrète qui, à chaque expérience, associe le gain algébrique du joueur (positif ou négatif).

2. *(1 point)* Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.
3. *(2 points)* Présenter dans un tableau la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

   On justifiera soigneusement chacune des valeurs du tableau.
4. *(1 point)* Quel est le gain moyen de ce jeu ?
5. *(3 points)* Compléter l'algorithme fourni en **annexe**, qui simule une expérience dans ces conditions et renvoie la valeur de X associée.

Exercice 5 - Trigonométrie (4 points) (***)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes, d'inconnue x :

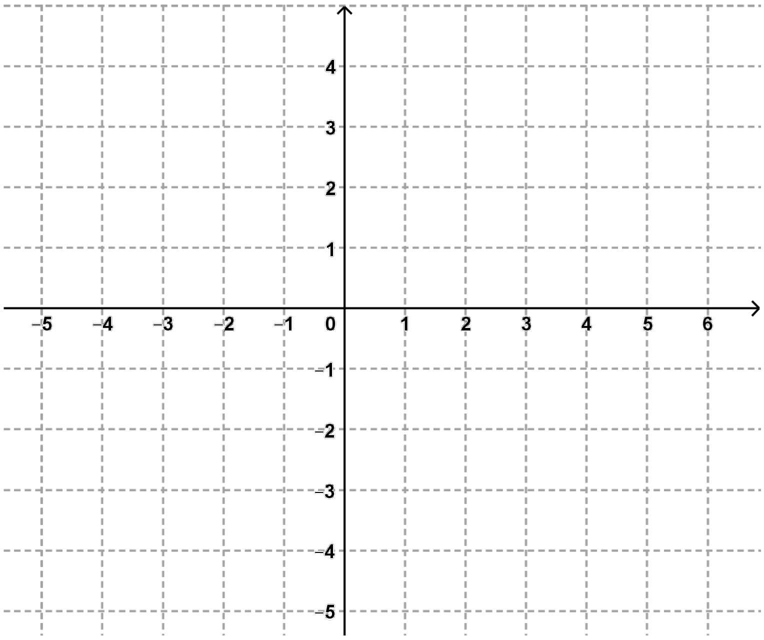
1. *(2 points)* $\left(2\sin(x) - \sqrt{3}\right)(\sin(x) + 1) = 0$;
2. *(2 points)* $4\left(\sin(x)\right)^2 - 1 = 0$.

   Aide : Penser à factoriser le membre de gauche à l'aide d'une identité remarquable, avant de conclure sur les valeurs possibles pour x.

ANNEXE

Prénom : NOM :

Exercice 3



Exercice 4

$B1 \longleftarrow randint(1{,}3)$

$B2 \longleftarrow randint(1{,}3)$

$B3 \longleftarrow randint(1{,}3)$

$X \longleftarrow -10$

Si ....

Alors $X \longleftarrow X + \ldots\ldots$

Fin Si

Si .... et .... et ....

Alors $X \longleftarrow X + \ldots\ldots$

Fin Si

Si $B1 + B2 + B3 \ldots\ldots\ldots$

Alors $X \longleftarrow X + \ldots\ldots$

Fin Si

Si $B1 + B2 + B3 \ldots\ldots\ldots$

Alors $X \longleftarrow X + \ldots\ldots$

Fin Si

Remarque : En Python, la fonction $randint(x,y)$ renvoie un nombre entier aléatoire de l'intervalle $[x\,;y]$.