Chapitre 8

Limites de suites

8.1 Notion de limite

Étudier la limite d'une suite revient à déterminer ce que deviennent les nombres u_n lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes et tend vers $+\infty$.

On peut se poser les questions suivantes :

- Les valeurs de u_n semblent-elles se rapprocher d'un nombre réel fixe ?
- Les valeurs de u_n semblent-elles pouvoir dépasser n'importe quel nombre réel donné ?

Lorsque la limite d'une suite (u_n) existe, on note ce nombre $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

8.2 Limite de la suite (q^n) avec $q > 0$

Propriété. *Si q est un nombre réel strictement positif, alors :*

- *si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$;*
- *si $0 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$;*
- *si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$.*

Exemple. *On définit la suite (S_n) de terme général $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$.*

On a donc :

$$S_n = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 2 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

D'après la propriété : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, donc on en tire : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 2 \times (1 - 0) = 2$.