Baccalauréat blanc série Économique et Sociale

Épreuve de Mathématiques

Mercredi 7 février 2018

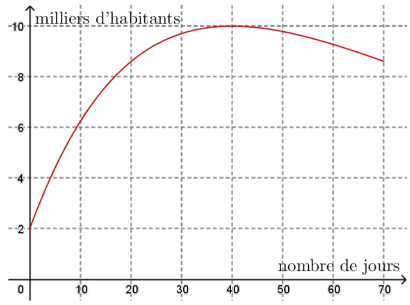
Candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité

L'utilisation des lecteurs mp3, téléphones portables, montres connectées et d'autres outils de communication est interdite.
L'utilisation d'une seule calculatrice et des outils de construction géométrique est autorisée conformément à la note de service n° 2015-056 du 17-3-2015.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (6 points)

L'évolution de la population d'une station balnéaire pour l'été 2015 a été modélisée par une fonction f, définie sur l'intervalle $[0\,;70]$, dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.

Lorsque x est le nombre de jours écoulés après le 1^{er} juillet, $f(x)$ désigne la population en millier d'habitants.
Ainsi, $x = 30$ correspond au 31 juillet et $f(30)$ représente la population qu'il est prévu d'accueillir le 31 juillet.
On estime qu'un habitant utilisera chaque jour entre 45 et 55 litres d'eau.



Partie A

Dans cette partie, les réponses sont à fournir par lecture graphique.

1. (a) Estimer le nombre maximal d'habitants présents dans la station balnéaire selon ce modèle durant l'été 2015 et préciser à quelle date ce maximum serait atteint.
   (b) La commune est en capacité de fournir 600000 litres d'eau par jour, est-ce suffisant ?
2. Estimer le nombre de jours durant lesquels le nombre d'habitants de la station balnéaire devrait rester supérieur à 80% du nombre maximal prévu.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;70]$ par :

$$f(x) = 2 + 0{,}2x\mathrm{e}^{-0{,}025x+1}.$$

1. Calculer $f(9)$ puis vérifier que la consommation d'eau le 10 juillet serait, selon ce modèle, au plus de 324890 litres.
2. (a) Démontrer que $f'(x) = (0{,}2 - 0{,}005x)\mathrm{e}^{-0{,}025x+1}$, où f' est la fonction dérivée de f.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;70]$.
   (c) En déduire la date de la consommation d'eau maximale.

Partie C

On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;70]$ par :

$$g(x) = 55f(x) = 110 + 11x\mathrm{e}^{-0{,}025x+1}.$$

Lorsque x est le nombre de jours écoulés après le 1^{er} juillet, $g(x)$ représente alors la consommation maximale d'eau prévue ce jour-là et exprimée en m^3.

On note G la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;70]$ par :

$$G(x) = 110x - (440x + 17600)\mathrm{e}^{-0{,}025x+1}.$$

On admet que la fonction G est une primitive de la fonction g.

La somme $S = g(10) + g(11) + g(12) + \cdots + g(20)$ représente la consommation maximale d'eau du 10$^{\text{e}}$ au 20$^{\text{e}}$ jour exprimée en m^3.

1. En l'illustrant sur la courbe $\mathcal{C}_g$ de l'**annexe** à rendre avec la copie, donner une interprétation graphique en termes d'aire de la somme S.
2. En déduire une valeur approximative de cette quantité d'eau consommée du 10$^{\text{e}}$ au 20$^{\text{e}}$ jour.

Exercice 2 (5 points)

Le fonctionnement de certaines centrales géothermiques repose sur l'utilisation de la chaleur du sous-sol. Pour pouvoir exploiter cette chaleur naturelle, il est nécessaire de creuser plusieurs puits suffisamment profonds.

Lors de la construction d'une telle centrale, on modélise le tarif pour le forage du premier puits par la suite (u_n) définie pour tout nombre entier naturel n non nul par :

$$u_n = 2000 \times 1{,}008^{n-1}.$$

où u_n représente le coût en euro du forage de la n-ième dizaine de mètres.

On a ainsi $u_1 = 2000$ et $u_2 = 2016$, c'est-à-dire que le forage des dix premiers mètres coûte 2000 euros, et celui des dix mètres suivants coûte 2016 euros.

Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats obtenus au centième.

1. Calculer u_3 puis le coût total de forage des 30 premiers mètres.
2. Pour tout nombre entier naturel n non nul :
   (a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et préciser la nature de la suite (u_n).
   (b) En déduire le pourcentage d'augmentation du coût du forage de la $(n+1)$-ième dizaine de mètres par rapport à celui de la n-ième dizaine de mètres.
3. On considère l'algorithme ci-contre.
   On choisit de prendre 5 comme valeur de n.

   $u \longleftarrow 2000$
   $S \longleftarrow 2000$
   Pour i allant de 2 à n
   $|u \longleftarrow u \times 1{,}008$
   $|S \longleftarrow S + u$
   Fin Pour

   (a) Faire fonctionner l'algorithme précédent pour cette valeur de n.
   Résumer les résultats obtenus à chaque étape dans le tableau ci-dessous, qui est à recopier sur la copie et à compléter en ajoutant autant de colonnes que nécessaire.

Valeur de i		2	...
Valeur de u	2000		...
Valeur de S	2000		...

   (b) Quelle est la valeur prise par S à la fin de l'exécution ?
   Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
4. On note $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ la somme des n premiers termes de la suite (u_n), n étant un nombre entier naturel non nul. On admet que :

$$S_n = -250000 + 250000 \times 1{,}008^n.$$

   Le budget consenti pour le forage du premier puits est de 125000 euros. On souhaite déterminer la profondeur maximale du puits que l'on peut espérer avec ce budget.
   (a) Calculer la profondeur maximale par la méthode de votre choix (utilisation de la calculatrice, résolution d'une inéquation...).
   (b) Modifier l'algorithme précédent afin qu'il permette de répondre au problème posé.

Exercice 3 (5 points)

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes les unes des autres.

Une grande entreprise vient de clôturer sa campagne de recrutement qui s'est déroulée en deux temps :

- *premier temps* : étude du dossier présenté par le candidat ;
- *deuxième temps* : entretien en vue du recrutement.

Le processus de recrutement mis en œuvre par l'entreprise est le suivant :

- si le dossier est jugé de bonne qualité, alors le candidat est reçu en entretien par le directeur des ressources humaines ;
- si le dossier n'est pas jugé de bonne qualité, alors le candidat subit des tests puis est reçu en entretien par le directeur de l'entreprise.

Dans les deux cas, à l'issue de l'entretien, le candidat est recruté ou ne l'est pas. À l'issue de cette campagne de recrutement, l'entreprise publie les résultats suivants :

- 30% des candidats avaient un dossier jugé de bonne qualité ;
- 20% des candidats n'ayant pas un dossier jugé de bonne qualité ont été recrutés ;
- 38% des candidats ont été recrutés.

1. On prend un candidat au hasard et on note :
   - D l'évènement « le candidat a un dossier jugé de bonne qualité » ;
   - R l'évènement « le candidat est recruté par l'entreprise ».

   (a) Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré (incomplet).

   (b) Calculer la probabilité que le candidat n'ait pas un dossier de bonne qualité et ne soit pas recruté par l'entreprise.

   (c) Montrer que la probabilité de l'évènement $D \cap R$ est égale à 0,24.

   (d) En déduire la probabilité qu'un candidat soit recruté sachant que son dossier est jugé de bonne qualité. Compléter l'arbre pondéré réalisé précédemment.

2. Dix personnes postulent pour un emploi dans l'entreprise. Les études de leurs candidatures sont faites indépendamment les unes des autres. On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi les 10 personnes.

   (a) Justifier que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}38$.

   (b) Calculer la probabilité qu'au moins une des dix personnes soit recrutée.
   On donnera la valeur exacte puis une valeur du résultat arrondie à 10^{-3}.

3. Deux amis, Quentin et Coralie, sont convoqués le même jour pour un entretien avec la direction des ressources humaines.

   Coralie arrive à 8h30 alors que Quentin arrive au hasard entre 8h et 9h.

   On désigne par T la variable aléatoire donnant l'heure d'arrivée de Quentin et on admet que T suit la loi uniforme sur l'intervalle $[8\,;9]$.

   Déterminer la probabilité que Coralie attende Quentin plus de dix minutes.

Exercice 4 (4 points)

Cet exercice est un Q.C.M. (Questionnaire à Choix Multiples). Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte. Recopier le numéro de la question et la réponse exacte.

Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Une réponse multiple ne rapporte aucun point.

1. La suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 400$ et de raison $\frac{1}{2}$. La somme $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$ vaut :

   (a) $2 \times (1 - 0{,}5^{10})$ (b) $2 \times (1 - 0{,}5^{11})$

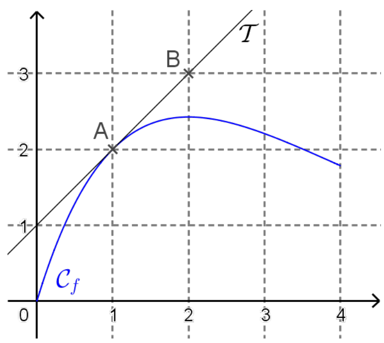
   (c) $800 \times (1 - 0{,}5^{10})$ (d) $800 \times (1 - 0{,}5^{11})$

2. Le prix d'une action a augmenté chaque mois de 5% pendant 3 mois consécutifs. Globalement, le prix de l'action a été multiplié par :

   (a) $1{,}05^3$ (b) 1,15 (c) $3 \times 1{,}05$ (d) 1,45

Dans les deux questions suivantes, f est une fonction définie et dérivable sur $[0\,;4]$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous. On a tracé la droite $\mathcal{T}$, tangente à $\mathcal{C}_f$ en A$(1\,;2)$. Cette droite passe par le point B$(2\,;3)$.

On note f' la fonction dérivée de f.



3. La valeur exacte de $f'(1)$ est :

   (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

4. En notant F une primitive de f sur $[0\,;4]$, les variations de F sur cet intervalle sont les suivantes :

   (a) strictement croissante sur $[0\,;4]$;

   (b) strictement décroissante sur $[0\,;4]$;

   (c) strictement croissante sur $[0\,;2]$, puis strictement décroissante sur $[2\,;4]$;

   (d) strictement décroissante sur $[0\,;2]$, puis strictement croissante sur $[2\,;4]$.

ANNEXE

Prénom : NOM :

Exercice 1