Chapitre 10

La fonction logarithme népérien

10.1 La fonction logarithme népérien

10.1.1 Généralités

Théorème-Définition. *Pour tout nombre réel strictement positif* t*, l'équation* $\mathrm{e}^x = t$ *admet une unique solution dans* $\mathbb{R}$*.*

On peut donc définir une fonction sur $]0\,;+\infty[$ *qui, à chaque nombre réel strictement positif* t *associe l'unique nombre réel* x *tel que* $\mathrm{e}^x = t$*.*

Cette fonction est appelée fonction ***logarithme népérien****, on la note* $\ln$*.*

Exemples.

- *Comme* $\mathrm{e}^x = 1 \iff x = 0$*, la seule solution de l'équation* $\mathrm{e}^x = 1$ *est* $x = 0$ *et on a donc :* $\ln(1) = 0$.
- *Comme* $\mathrm{e}^x = \mathrm{e} \iff x = 1$*, la seule solution de l'équation* $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}$ *est* $x = 1$ *et on a donc :* $\ln(\mathrm{e}) = 1$.

Propriété. *Pour tout nombre réel strictement positif* t *et pour tout nombre réel* x*, on a :*

$$\mathrm{e}^x = t \iff x = \ln(t).$$

Conséquence.

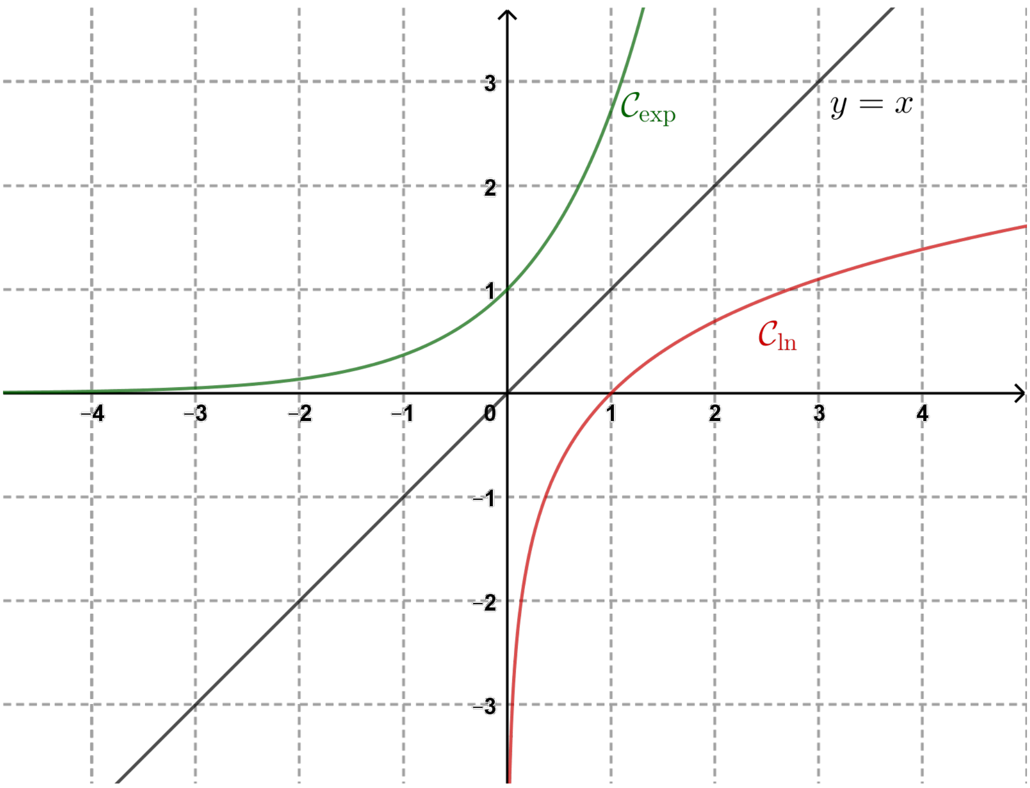
- *Pour tout nombre réel strictement positif* t*, on a :* $\mathrm{e}^{\ln(t)} = t$*.*
- *Pour tout nombre réel* x*, on a :* $\ln(\mathrm{e}^x) = x$*.*

Exemples.

- $e^x = 2 \iff x = \ln(2)$;
- $e^{\ln(3)} = 3$;
- $\ln(e^{-6}) = -6$.

10.1.2 Position relative des courbes

Des propriétés précédentes, on tire que la courbe représentative de la fonction logarithme népérien et la courbe représentative de la fonction exponentielle sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



10.1.3 Étude de la fonction

Propriété. *La fonction* $\ln$ *est dérivable sur* $]0\,;+\infty[$ *et, pour tout nombre réel* $x > 0$ *:*

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Conséquence. *La fonction* $\ln$ *est strictement croissante sur* $]0\,;+\infty[$.

10.2 La relation fonctionnelle

10.2.1 Généralités

Propriété. *Pour tous nombres réels strictement positifs a et b, et pour tout nombre entier relatif p, on a :*

- $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$;
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$;
- $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln(b)$;
- $\ln\left(a^p\right) = p \times \ln(a)$;
- $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2} \times \ln(a)$.

Exemples.

- $\ln(6) = \ln(2 \times 3) = \ln(2) + \ln(3)$;
- $\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^3}\right) = -\ln\left(\mathrm{e}^3\right) = -3\ln(\mathrm{e}) = -3$;
- $\ln(\sqrt{\mathrm{e}}) = \dfrac{1}{2}\ln(\mathrm{e}) = \dfrac{1}{2}$.

10.2.2 Application aux résolutions d'équations

Exemple. *Une entreprise voit son chiffre d'affaires progresser de 5% sur une année civile. Elle se demande quel est le taux d'évolution mensuel moyen de son chiffre d'affaires.*

Le coefficient multiplicateur correspondant à l'évolution globale vaut 1,05, et on cherche la valeur du taux d'évolution mensuel moyen t. Comme il y a douze mois dans l'année, le coefficient multiplicateur global vaut $(1+t)^{12}$. On résout alors l'équation :

$$\begin{aligned}
(1+t)^{12} = 1{,}05 &\iff \ln\left((1+t)^{12}\right) = \ln(1{,}05) \\
&\iff 12\ln(1+t) = \ln(1{,}05) \\
&\iff \ln(1+t) = \frac{\ln(1{,}05)}{12} \\
&\iff \mathrm{e}^{\ln(1+t)} = \mathrm{e}^{\frac{\ln(1{,}05)}{12}} \\
&\iff 1+t = \mathrm{e}^{\frac{\ln(1{,}05)}{12}} \\
&\iff t = \mathrm{e}^{\frac{\ln(1{,}05)}{12}} - 1 \\
&\iff t \approx 0{,}0041
\end{aligned}$$

Le taux d'évolution annuel moyen vaut donc environ 0,41%.