Chapitre 10 - La fonction logarithme népérien

Paul DARTHOS

Lycée Jaufré RUDEL - BLAYE

26 février 2018

Une nouvelle fonction

Théorème-définition

Théorème-Définition

Pour tout nombre réel strictement positif t, l'équation $\mathrm{e}^x = t$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.
On peut donc définir une fonction sur $]0\,;+\infty[$ qui, à chaque nombre réel strictement positif t associe l'unique nombre réel x tel que $\mathrm{e}^x = t$.
Cette fonction est appelée fonction ***logarithme népérien****, on la note* ln.

Exemples

Exemples

- *Comme* $e^x = 1 \iff x = 0$, *la seule solution de l'équation* $e^x = 1$ *est* $x = 0$ *et on a donc :* $\ln(1) = 0$.
- *Comme* $e^x = e \iff x = 1$, *la seule solution de l'équation* $e^x = e$ *est* $x = 1$ *et on a donc :* $\ln(e) = 1$.

Propriété

Propriété

Pour tout nombre réel strictement positif t et pour tout nombre réel x, on a :

$$e^x = t \Longleftrightarrow x = \ln(t).$$

Conséquence

- *Pour tout nombre réel strictement positif t, on a :* $e^{\ln(t)} = t$.
- *Pour tout nombre réel x, on a :* $\ln(e^x) = x$.

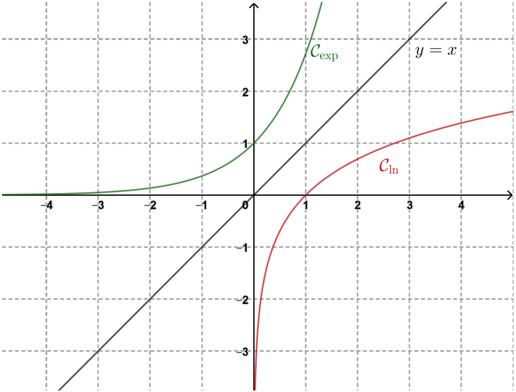
Exemples

Exemples

- $e^x = 2 \iff x = \ln(2)$;
- $e^{\ln(3)} = 3$;
- $\ln(e^{-6}) = -6$.

Position relative des courbes

La courbe représentative de la fonction logarithme népérien et la courbe représentative de la fonction exponentielle sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Étude de la fonction

Propriété

La fonction ln *est dérivable sur* $]0\,;+\infty[$ *et, pour tout nombre réel* $x > 0$ *:*

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Conséquence

La fonction ln *est strictement croissante sur* $]0\,;+\infty[$.

La relation fonctionnelle

Propriété

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b, et pour tout nombre entier relatif p, on a :

- $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$;
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$;
- $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln(b)$;
- $\ln\left(a^p\right) = p \times \ln(a)$;
- $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2} \times \ln(a)$.

Exemples

Exemples

- $\ln(6) = \ln(2 \times 3) = \ln(2) + \ln(3)$;
- $\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^3}\right) = -\ln\left(\mathrm{e}^3\right) = -3\ln(\mathrm{e}) = -3$;
- $\ln(\sqrt{\mathrm{e}}) = \dfrac{1}{2}\ln(\mathrm{e}) = \dfrac{1}{2}$.

Application aux résolutions d'équations

Une entreprise voit son chiffre d'affaires progresser de 5% sur une année civile.
Elle se demande quel est le taux d'évolution mensuel moyen de son chiffre d'affaires.

Le coefficient multiplicateur correspondant à l'évolution globale vaut 1,05, et on cherche la valeur du taux d'évolution mensuel moyen t.
Comme il y a douze mois dans l'année, le coefficient multiplicateur global vaut $(1+t)^{12}$.

Application aux résolutions d'équations

$$
\begin{aligned}
(1+t)^{12} = 1{,}05 &\iff \ln\left((1+t)^{12}\right) = \ln(1{,}05) \\
&\iff 12\ln(1+t) = \ln(1{,}05) \\
&\iff \ln(1+t) = \frac{\ln(1{,}05)}{12} \\
&\iff \mathrm{e}^{\ln(1+t)} = \mathrm{e}^{\frac{\ln(1{,}05)}{12}} \\
&\iff 1+t = \mathrm{e}^{\frac{\ln(1{,}05)}{12}} \\
&\iff t = \mathrm{e}^{\frac{\ln(1{,}05)}{12}} - 1 \approx 0{,}0041
\end{aligned}
$$

Le taux d'évolution annuel moyen vaut donc environ 0,41%.