Chapitre 11

Intégration (partie 2)

11.1 Intégrale d'une fonction de signe quelconque

Propriété. *f est une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$.*

*On appelle **intégrale de f entre a et b** la différence :*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Exemple. *Si f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\mathrm{e}^{2x-6}$, alors :*

$$\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^{2x-6}\right]_2^5 = \mathrm{e}^{2\times5-6} - \mathrm{e}^{2\times2-6} = \mathrm{e}^{-4} - \mathrm{e}^{-2}.$$

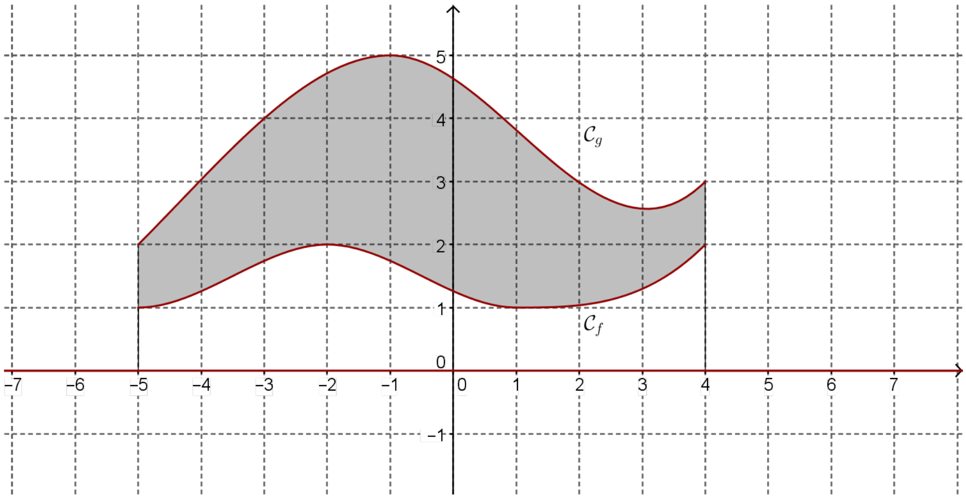
Propriétés. *Si f et g sont deux fonctions définies et continues sur un intervalle I, et a, b et c trois nombres réels appartenant à I, et k un nombre réel quelconque, alors :*

- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$
- $\displaystyle\int_a^b k\times f(x)\,\mathrm{d}x = k\times\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$
- $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$
- ***Relation de Chasles :*** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$
- *Si $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a\,;b]$, alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$
- *Si $f(x) \geqslant g(x)$ pour tout $x \in [a\,;b]$, alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

11.2 Applications du calcul intégral

11.2.1 Calcul d'aires

Propriété. *Si f et g sont deux fonctions continues et positives sur l'intervalle $[a\,;b]$, telles que $f(x) \leqslant g(x)$ sur cet intervalle, alors l'aire du domaine délimité par les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est la suivante :* $\mathcal{A} = \displaystyle\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$.



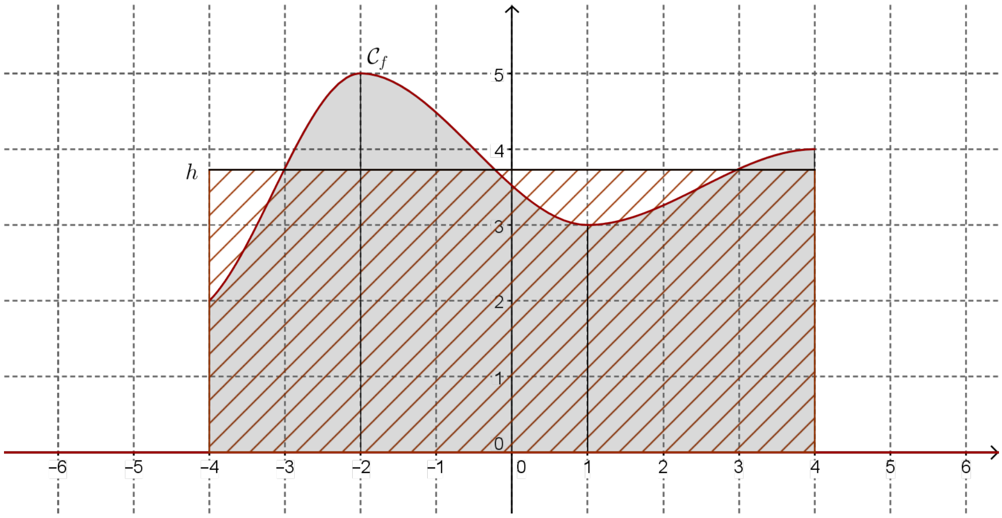
11.2.2 Valeur moyenne

Définition. *Si f est une fonction définie et continue sur un intervalle $[a\,;b]$, alors on appelle* ***valeur moyenne de f sur*** $[a\,;b]$ *le nombre réel m tel que :*

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Cette définition peut être illustrée en considérant une fonction f positive sur l'intervalle $[a\,;b]$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est égale à l'aire du domaine délimité par $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équations $y = 0$, $x = a$ et $x = b$.

La valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$ correspond alors à la hauteur h du rectangle de largeur $b - a$ dont l'aire vaut $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.



Exemple. *On considère la fonction $f : x \mapsto 2x$ définie et continue sur l'intervalle $[-1\,;3]$. La valeur moyenne de f sur cet intervalle est alors :*

$$m = \frac{1}{3-(-1)}\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_{-1}^{3} 2x\,\mathrm{d}x.$$

Une primitive de f étant $F : x \mapsto x^2$, on a alors :

$$m = \frac{1}{4}(F(3)-F(-1)) = \frac{1}{4}(3^2-(-1)^2) = \frac{1}{4}(9-1) = \frac{8}{4} = 2.$$