Chapitre 11 - Intégration (partie 2)

Paul DARTHOS

Lycée Jaufré RUDEL - BLAYE

13 mars 2018

On reprend

Intégrale d'une fonction de signe quelconque

Propriété

f est une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$.
On appelle ***intégrale de** f **entre** a **et** b* *la différence :*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Exemple

Si f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\mathrm{e}^{2x-6}$, alors :

$$\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^{2x-6}\right]_2^5 = \mathrm{e}^{2\times5-6} - \mathrm{e}^{2\times2-6} = \mathrm{e}^{-4} - \mathrm{e}^{-2}.$$

Propriétés de calcul

Propriétés

Si f et g sont deux fonctions définies et continues sur un intervalle I, et a, b et c trois nombres réels appartenant à I, et k un nombre réel quelconque, alors :

- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$
- $\displaystyle\int_a^b k \times f(x)\,\mathrm{d}x = k \times \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$
- $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

Propriétés de calcul

Propriétés

- ***Relation de Chasles :***
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$
- *Si* $f(x) \geqslant 0$ *pour tout* $x \in [a\,;b]$, *alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$
- *Si* $f(x) \geqslant g(x)$ *pour tout* $x \in [a\,;b]$, *alors*
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

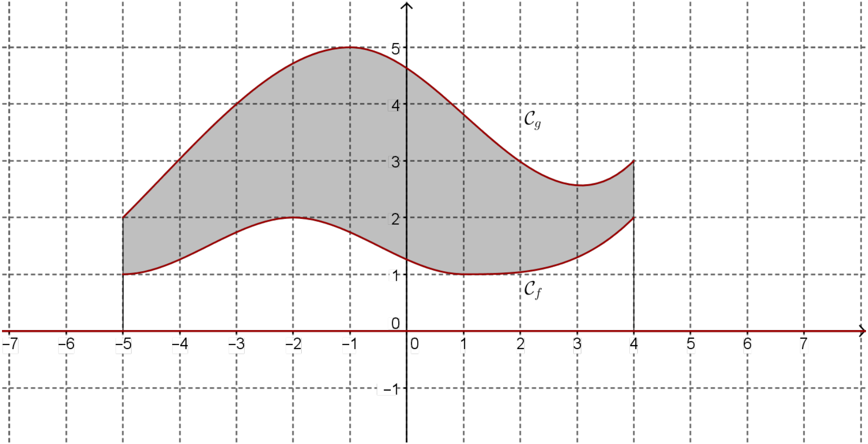
Propriété

Propriété

Si f et g sont deux fonctions continues et positives sur l'intervalle $[a\,;b]$, telles que $f(x) \leqslant g(x)$ sur cet intervalle, alors l'aire du domaine délimité par les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est la suivante :

$$\mathcal{A} = \int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x.$$

Propriété



Valeur moyenne

Définition

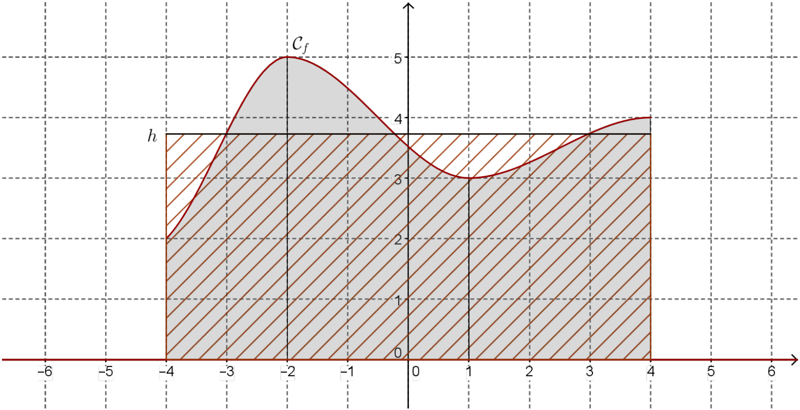
Si f est une fonction définie et continue sur un intervalle $[a\,;b]$, alors on appelle ***valeur moyenne de f sur*** $[a\,;b]$ *le nombre réel m tel que :*

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Cette définition peut être illustrée en considérant une fonction f positive sur l'intervalle $[a\,;b]$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est égale à l'aire du domaine délimité par $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équations $y=0$, $x=a$ et $x=b$.

Valeur moyenne

La valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$ correspond alors à la hauteur h du rectangle de largeur $b-a$ dont l'aire vaut $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.



Exemple

Exemple

On considère la fonction $f : x \mapsto 2x$ définie et continue sur l'intervalle $[-1\,;3]$. La valeur moyenne de f sur cet intervalle est alors :

$$m = \frac{1}{3-(-1)} \int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} \int_{-1}^{3} 2x\,\mathrm{d}x.$$

Une primitive de f étant $F : x \mapsto x^2$, on a alors :

$$m = \frac{1}{4}(F(3) - F(-1)) = \frac{1}{4}(3^2 - (-1)^2) = \frac{1}{4}(9-1) = \frac{8}{4} = 2.$$