Devoir Surveillé 5

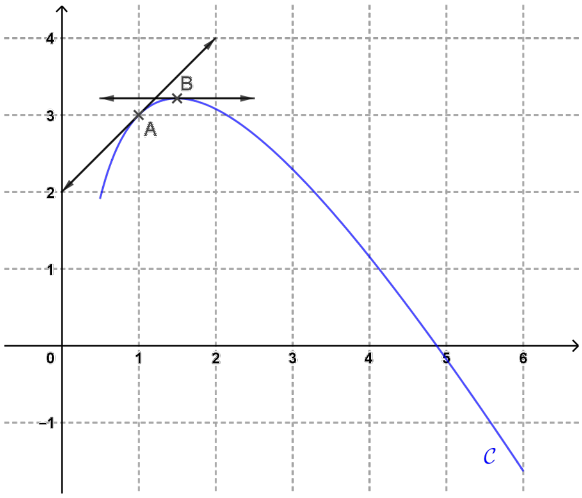
Mardi 3 avril 2018

Exercice 1 (9 points) (**)

La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous représente, dans le plan muni d'un repère orthonormé, une fonction f définie et dérivable sur $[0{,}5\,;6]$. Les points A$(1\,;3)$ et B d'abscisse 1,5 sont sur la courbe $\mathcal{C}$.

Les tangentes à la courbe $\mathcal{C}$ aux points A et B sont aussi représentées en pointillés sur ce graphique, la tangente au point B est horizontale.

On note f' la fonction dérivée de f.



Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A - Étude graphique.

1. *(1 point)* Déterminer $f'(1{,}5)$.
2. *(1 point)* La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ passant par A passe par le point de coordonnées $(0\,;2)$. Déterminer une équation de cette tangente.
3. *(1 point)* Donner un encadrement de l'aire, en unités d'aire et à l'unité près, du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

Partie B - Étude analytique.

On admet que la fonction f est définie sur $[0{,}5\,;6]$ par :

$$f(x) = -2x + 5 + 3\ln(x).$$

1. *(1 point)* Pour tout nombre réel x de $[0{,}5\,;6]$, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{-2x+3}{x}$.
2. *(1 point)* Étudier le signe de f' sur $[0{,}5\,;6]$ puis dresser le tableau de variations de f sur $[0{,}5\,;6]$.

3. *(1 point)* Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution α sur $[0{,}5\,;6]$.
   Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
4. *(1 point)* En déduire le tableau de signes de $f(x)$ sur $[0{,}5\,;6]$.
5. On considère la fonction F définie sur $[0{,}5\,;6]$ par $F(x) = -x^2+2x+3x\ln(x)$.
   (a) *(1 point)* Montrer que F est une primitive de f sur $[0{,}5\,;6]$.
   (b) *(1 point)* En déduire l'aire exacte, en unité d'aire, du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$. En donner ensuite une valeur arrondie au dixième.

Exercice 2 (5 points) (**)

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte. Recopier le numéro de la question et la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Une réponse multiple ne rapporte aucun point.

1. La solution exacte de l'équation $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \dfrac{3}{10}$ est :
   (a) 1,74. (b) $\dfrac{\ln(10)-\ln(3)}{\ln(2)}$.
   (c) $-\dfrac{\ln(3)}{\ln(5)}$. (d) 0,5.
2. f est la fonction définie pour tout nombre réel x par : $f(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}$. La valeur exacte de l'intégrale $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$ est :
   (a) $4\mathrm{e}^4 - 4\mathrm{e}^{-4}$. (b) $4(\mathrm{e}^4 + \mathrm{e}^{-4})$.
   (c) 0. (d) 1.
3. Une grandeur a été augmentée de 5% la première année, puis de 7% la deuxième année.
   Sur ces deux années, le pourcentage global d'augmentation est égal à :
   (a) 12%. (b) 35%. (c) 0,35%. (d) 12,35%.
4. A et B sont deux évènements d'une expérience aléatoire. On note $\overline{B}$ l'évènement contraire de B.
   On sait que : $\mathrm{P}(A) = 0{,}6$, $\mathrm{P}(B) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}42$.
   On peut affirmer que :
   (a) $\mathrm{P}_A(B) = 0{,}3$. (b) $\mathrm{P}(A \cup B) = 0{,}58$.
   (c) $\mathrm{P}_B(A) = 0{,}84$. (d) $\mathrm{P}(A \cap \overline{B}) = 0{,}28$.
5. Dans une station de ski, le temps d'attente à un télésiège donné, exprimé en minute, peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;5]$.
   On peut affirmer que :
   (a) $\mathrm{E}(X) = \dfrac{2}{5}$. (b) $\mathrm{P}(X > 2) = \dfrac{3}{5}$.
   (c) $\mathrm{P}(X \leqslant 2) = \dfrac{3}{5}$. (d) $\mathrm{P}(X \leqslant 5) = 0$.

Exercice 3 (6 points) (**)

D'après l'AFDIAG (Association Française Des Intolérants au Gluten), la maladie cœliaque, aussi appelée intolérance au gluten, est l'une des maladies digestives les plus fréquentes. Elle touche environ 1% de la population.

On estime que seulement 20% des personnes intolérantes au gluten passent le test pour être diagnostiquées.

On considère que si une personne n'est pas intolérante au gluten, elle ne passe pas le test pour être diagnostiquée.

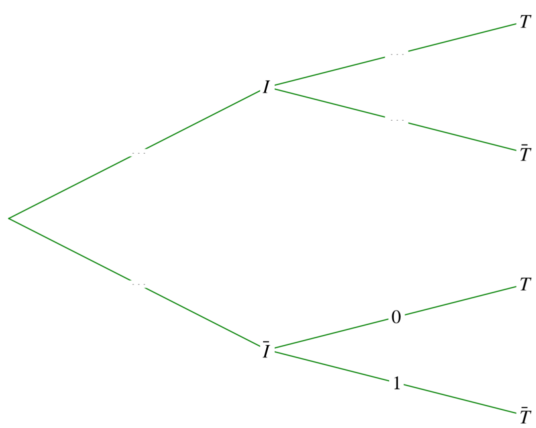
On choisit au hasard une personne dans la population française qui compte environ 66,6 millions d'habitants au 1er janvier 2016.

On considère les évènements :

- I : « la personne choisie est intolérante au gluten » ;
- T : « la personne choisie passe le test pour être diagnostiquée ».

Partie A.

1. *(1 point)* Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous :



2. *(1 point)* Calculer la probabilité que la personne choisie soit intolérante au gluten et ne passe pas le test pour être diagnostiquée.
3. *(1 point)* Montrer que $\mathrm{P}(T) = 0{,}002$.

Partie B.

L'AFDIAG a conduit une enquête et a constaté que la maladie cœliaque était diagnostiquée en moyenne 11 ans après les premiers symptômes.

On note X la variable aléatoire représentant le temps, en année, mis pour diagnostiquer la maladie cœliaque à partir de l'apparition des premiers symptômes.

On admet que la loi de probabilités de X peut être assimilée à la loi normale d'espérance $\mu = 11$ et d'écart type $\sigma = 4$.

1. *(0,5 point)* Calculer la probabilité que la maladie soit diagnostiquée entre 9 ans et 13 ans après les premiers symptômes. Arrondir le résultat à 10^{-3}.
2. *(0,5 point)* Calculer $\mathrm{P}(X \leqslant 6)$. Arrondir le résultat à 10^{-3}.

3. *(1 point)* Sachant que $P(X \leqslant a) = 0{,}84$, donner la valeur de a arrondie à l'unité.

   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. *(1 point)* Laquelle de ces trois courbes représente la fonction de densité de la loi normale d'espérance $\mu = 11$ et d'écart type $\sigma = 4$? Justifier le choix. On pourra s'aider des réponses aux questions précédentes.