Devoir Surveillé 5 - Correction

Exercice 1

Partie A - Étude graphique.

1. $f'(1{,}5)$ correspond au coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en $x = 1{,}5$. Graphiquement : $f'(1{,}5) = 0$.
2. La tangente passe par $\text{A}(1\,;3)$ et le point de coordonnées $(0\,;2)$. Son coefficient directeur vaut alors $m = \dfrac{3-2}{1-0} = 1$, et son ordonnée à l'origine vaut $p = 2$. On en tire son équation : $y = x + 2$.
3. En comptant les unités d'aire comprises dans ce domaine, on en tire que son aire est comprise entre 3 et 4 unités d'aire.

Partie B - Étude analytique.

1. Pour tout nombre réel x de $[0{,}5\,;6]$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2 \times 1 + 0 + 3 \times \frac{1}{x} \\ &= -2 + \frac{3}{x} \\ &= \frac{-2 \times x}{x} + \frac{3}{x} \\ &= \frac{-2x+3}{x} \end{aligned}$$

2. Si $x \in [0{,}5\,;6]$, alors $x > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le même que le signe de $(-2x+3)$.
   On a : $-2x + 3 = 0 \iff x = 1{,}5$, et : $-2x + 3 > 0 \iff x < 1{,}5$.
   On en tire les tableaux suivants :

x	0.5		1.5		6
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$f(0.5)$	$\nearrow$	$f(1.5)$	$\searrow$	$f(6)$

   Calculs :
   - $f(0{,}5) = -2 \times 0{,}5 + 5 + 3\ln(0{,}5) = 4 + 3\ln(0{,}5)$;
   - $f(1{,}5) = -2 \times 1{,}5 + 5 + 3\ln(1{,}5) = 3 + 3\ln(1{,}5)$;
   - $f(6) = -2 \times 6 + 5 + 3\ln(6) = -7 + \ln(6)$.
3. En s'aidant de la calculatrice, on a : $f(0{,}5) > 0$, $f(1{,}5) > 0$ et $f(6) < 0$.
   Ainsi, f est strictement positive sur $[0{,}5\,;1{,}5]$, donc l'équation $f(x) = 0$ n'y admet aucune solution.

Par ailleurs, f est continue et strictement décroissante sur $[1{,}5\,;6]$, elle y varie entre $f(1{,}5) > 0$ et $f(6) < 0$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ y admet une unique solution α.

En s'aidant de la calculatrice, on a : $\alpha \approx 4{,}88$.

4. On en tire le tableau de signes de $f(x)$ sur $[0{,}5\,;6]$:

x	0.5		α		6
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

5. (a) Pour tout nombre réel x appartenant à $[0{,}5\,;6]$, on a :

$$\begin{aligned} F'(x) &= -2x + 2 + \left(3 \times \ln(x) + 3x \times \frac{1}{x}\right) \\ &= -2x + 2 + 3\ln(x) + 3 \\ &= -2x + 5 + 3\ln(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

On en conclut que F est une primitive de f sur $[0{,}5\,;6]$.

(b) L'aire exacte, en unité d'aire, du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$ vaut :

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x &= [F(x)]_1^2 \\ &= F(2) - F(1) \\ &= (-2^2 + 2 \times 2 + 3 \times 2 \times \ln(2)) - (-1^2 + 2 \times 1 + 3 \times 1 \times \ln(1)) \\ &= -4 + 4 + 6\ln(2) - (-1 + 2 + 0) \\ &= 6\ln(2) - 1 \\ &\approx 3{,}2 u.a. \end{aligned}$$

Exercice 2

1. On résout :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{3}{10} &\iff \ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right) = \ln\left(\frac{3}{10}\right) \\ &\iff x\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{3}{10}\right) \\ &\iff x = \frac{\ln(0{,}3)}{\ln(0{,}5)} \\ &\iff x = \frac{\ln(3) - \ln(10)}{\ln(1) - \ln(2)} \\ &\iff x = \frac{\ln(3) - \ln(10)}{-\ln(2)} \\ &\iff x = \frac{\ln(10) - \ln(3)}{\ln(2)} \quad \textbf{(réponse b)}. \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\mathrm{e}^{x^2}\right]_{-2}^{2}\\ &= \mathrm{e}^{2^2} - \mathrm{e}^{(-2)^2}\\ &= \mathrm{e}^4 - \mathrm{e}^4\\ &= 0 \quad \textbf{(réponse c)}.\end{aligned}$$

3. Augmenter une quantité de 5% revient à la multiplier par 1,05, et augmenter une quantité de 7% une quantité revient à la multiplier par 1,07. Les deux augmentations successives correspondent donc à une multiplication par $1{,}05 \times 1{,}07 = 1{,}1235$ soit une augmentation de 12,35% **(réponse d)**.

4. On a : $\mathrm{P}_B(A) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \dfrac{0{,}42}{0{,}5} = 0{,}84$ **(réponse c)**.

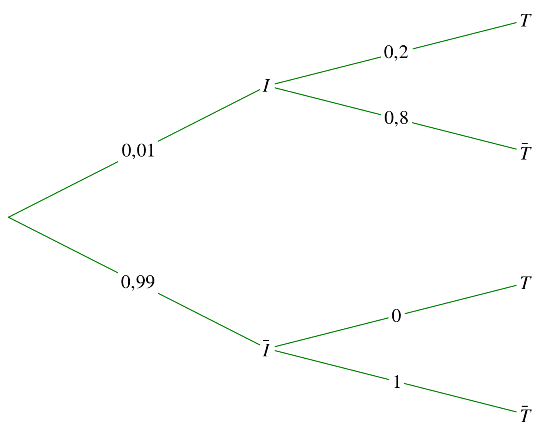
5. La fonction de densité associée à X est : $f(t) = \dfrac{1}{5-0} = \dfrac{1}{5}$. On a donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X > 2) &= \int_{2}^{5} f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{1}{5}t\right]_{2}^{5}\\ &= \frac{1}{5} \times 5 - \frac{1}{5} \times 2\\ &= \frac{3}{5} \quad \textbf{(réponse b)}.\end{aligned}$$

Exercice 3

Partie A.

1. On a :



2. On calcule la probabilité :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(I \cap \overline{T}\right) &= \mathrm{P}(I) \times \mathrm{P}_I\left(\overline{T}\right)\\ &= 0{,}01 \times 0{,}8\\ &= 0{,}008.\end{aligned}$$

3. I et $\overline{I}$ forment une partition de l'univers. D'après la loi des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(T) &= \mathrm{P}(I \cap T) + \mathrm{P}\left(\overline{I} \cap T\right)\\ &= 0{,}01 \times 0{,}2 + 0{,}99 \times 0\\ &= 0{,}002.\end{aligned}$$

Partie B.

1. En s'aidant de la calculatrice, on a :

$$\mathrm{P}(9 \leqslant X \leqslant 13) \approx 0{,}383.$$

2. En s'aidant de la calculatrice, on a :

$$\mathrm{P}(X \leqslant 6) \approx 0{,}106.$$

3. En s'aidant de la calculatrice, on a : $a \approx 15$.
   Cela signifie qu'il y a environ 84% de chances que la maladie cœliaque soit diagnostiquée durant les quinze premières années après les premiers symptômes.
4. La courbe $\mathcal{C}_3$ est celle qui correspond à la fonction de densité de la loi, car elle admet un axe de symétrie d'équation $x = 11$ (valeur centrale correspondant à $\mu = 11$) et on peut estimer graphiquement les aires correspondant aux probabilités calculées précédemment.