Devoir Surveillé 5R

Lundi 7 mai 2018

Exercice 1 - QCM (5 points) (**)

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte. Recopier le numéro de la question et la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Une réponse multiple ne rapporte aucun point.

1. Une grandeur a été augmentée de 3% la première année, puis de 6% la deuxième année.

   Sur ces deux années, le pourcentage global d'augmentation est égal à :

   (a) 9% ;

   (b) 9,18% ;

   (c) 0,18% ;

   (d) 18%.

2. Une primitive de $g(x) = \mathrm{e}^{3x}$ sur $\mathbb{R}$ est :

   (a) $G(x) = \mathrm{e}^{3x}$;

   (b) $G(x) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} + 5$;

   (c) $G(x) = 3\mathrm{e}^{3x} + 5$;

   (d) $G(x) = \frac{1}{3x}\mathrm{e}^{3x}$.

3. Pour tout nombre réel x, le nombre $\ln(4e^x)$ est égal à :

   (a) $4x$;

   (b) $2x$;

   (c) $4 + x$;

   (d) $x + \ln(4)$.

4. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$. On note h' sa fonction dérivée. Alors :

   (a) $h'(x) = -x^2\mathrm{e}^{-x^2}$;

   (b) $h'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$;

   (c) $h'(x) = \mathrm{e}^{-2x}$;

   (d) $h'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

5. Soit k la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $k(x) = \frac{4}{x} + 6$. Alors la valeur moyenne de k sur $[2\,;6]$ vaut :

   (a) 7,09 ;

   (b) $\ln(3) + 6$;

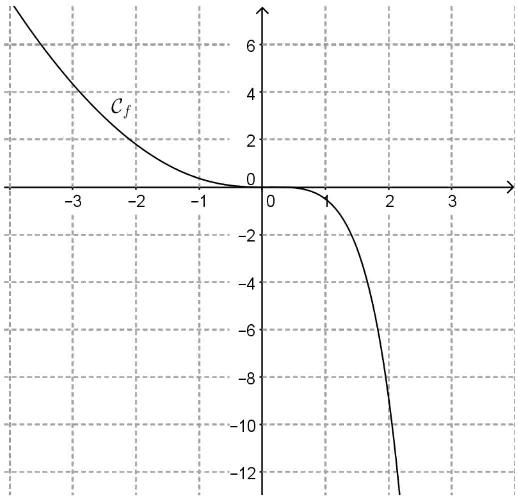
   (c) $4\ln(3) + 24$;

   (d) $\frac{2}{3} - 2$.

Exercice 2 - Analyse (8 points) (**)

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout nombre réel x, on ait $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - x^2\mathrm{e}^{x-1}$. On note f' sa fonction dérivée sur $\mathbb{R}$.

Le graphique ci-après contient une courbe représentative de cette fonction.



1. *(0,5 point)* Quelle conjecture pourrait-on faire concernant le sens de variation de f sur l'intervalle $[-3\,;2]$ en observant cette courbe ?

Dans la suite de l'exercice, on va s'intéresser à la validité de cette conjecture.

2. *(1 point)* Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = x \times g(x)$ où :

$$g(x) = 1 - (x+2)\mathrm{e}^{x-1}.$$

Pour la suite, on admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' sa fonction dérivée.

3. (a) *(1 point)* Calculer $g'(x)$ et étudier son signe suivant les valeurs du nombre réel x.
   (b) *(0,5 point)* En déduire le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
4. **Étude du signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x :**
   (a) *(0,5 point)* Montrer que, pour tout nombre réel $x \leqslant -3$, $g(x) > 0$.
   (b) *(0,5 point)* Calculer $g(1)$ et justifier que, pour tout nombre réel $x \in [1\,;+\infty[$:
   $$g(x) < 0.$$
   (c) *(1 point)* Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, que l'on notera α.
   (d) *(0,5 point)* Donner un encadrement de α au centième.
   (e) *(0,5 point)* En déduire le tableau de signes de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
5. **Sens de variation de la fonction f :**
   (a) *(1 point)* Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.
   (b) *(0,5 point)* En déduire le sens de variation de la fonction f.
   (c) *(0,5 point)* Que dire de la conjecture de la question 1 ?

Exercice 3 - Probabilités (7 points) (*)

Un restaurant propose à sa carte deux types de dessert :

- un assortiment de macarons, choisi par 50% des clients ;
- une part de tarte tatin, choisie par 30% des clients.

20% des clients ne prennent pas de dessert et aucun client ne prend plusieurs desserts.

Le restaurateur a remarqué que :

- parmi les clients ayant pris un assortiment de macarons, 80% prennent un café ;
- parmi les clients ayant pris une part de tarte tatin, 60% prennent un café ;
- parmi les clients n'ayant pris aucun dessert, 90% prennent un café.

On interroge au hasard un client de ce restaurant.

On note :

- M l'événement « Le client prend un assortiment de macarons » ;
- T l'évènement « Le client prend une part de tarte tatin » ;
- P l'évènement « Le client ne prend pas de dessert » ;
- C l'évènement « Le client prend un café » et $\overline{C}$ l'évènement contraire de C.

1. *(0,5 point)* En utilisant les données de l'énoncé, préciser la valeur de $\mathrm{P}(T)$ et celle de $\mathrm{P}_T(C)$, probabilité de l'évènement C sachant que T est réalisé.
2. *(1 point)* Dresser un arbre de probabilités complet correspondant à la situation.
3. (a) *(1 point)* Exprimer par une phrase ce que représente l'évènement $M \cap C$, puis calculer $\mathrm{P}(M \cap C)$.
   (b) *(1 point)* Montrer que $\mathrm{P}(C) = 0{,}76$.
4. *(1 point)* Quelle est la probabilité que le client prenne un assortiment de macarons sachant qu'il prend un café ? *(On donnera le résultat arrondi au centième.)*
5. Un assortiment de macarons est vendu 6€, une part de tarte tatin est vendue 7€ et un café est vendu 2€.

   Chaque client prend un plat (et un seul) au prix unique de 18€, ne prend pas plus d'un dessert ni plus d'un café.

   (a) *(0,5 point)* Quelles sont les six valeurs possibles pour la somme totale dépensée par un client ?

   (b) *(1 point)* Reproduire et compléter le tableau ci-dessous donnant la loi de probabilité de la somme totale dépensée par un client :

Sommes s_i	18	20	24	...	...	...
$P(s_i)$	0,02	0,18	...	...	...	...

   (c) *(1 point)* Calculer l'espérance mathématique de cette loi et interpréter ce résultat.