Devoir Surveillé 5R - Correction

Exercice 1 - QCM

1. Augmenter une quantité de 3% revient à la multiplier par $1,03$, et augmenter une quantité de 6% une quantité revient à la multiplier par $1,06$. Les deux augmentations successives correspondent donc à une multiplication par $1,03 \times 1,06 = 1,0918$ soit une augmentation de $9,18\%$ **(réponse b)**.
2. Une primitive de $g(x) = \mathrm{e}^{3x}$ sur $\mathbb{R}$ est $G(x) = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} + 5$ **(réponse (b))**.
   En effet, $G'(x) = \dfrac{1}{3} \times 3\mathrm{e}^{3x} + 0 = \mathrm{e}^{3x} = g(x)$.
3. Pour tout nombre réel x, le nombre $\ln(4\mathrm{e}^x)$ est égal à $\ln(4) + x$ **(réponse (d))**.
   En effet, $\ln(4\mathrm{e}^x) = \ln(4) + \ln(\mathrm{e}^x) = \ln(4) + x$.
4. $h'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$ **(réponse (b))**.
   En effet, $h'(x) = (-x^2)' \times \mathrm{e}^{-x^2} = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$.
5. La valeur moyenne de k sur $[2\,;6]$ vaut $\ln(3) + 6$ **(réponse (b))**.
   En effet, elle vaut :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6-2}\int_2^6 k(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}[4\ln(x) + 6x]_2^6 \\
&= \frac{1}{4}[(4\ln(6) + 6\times 6) - (4\ln(2) + 6 \times 2)] \\
&= \frac{1}{4}(4\ln(6) - 4\ln(2) + 24) \\
&= \ln(6) - \ln(2) + 6 \\
&= \ln\left(\frac{6}{2}\right) + 6 \\
&= \ln(3) + 6
\end{aligned}$$

Exercice 2 - Analyse

D'après le baccalauréat Amérique du Nord, Novembre 2010.

1. Il semblerait que la fonction soit strictement décroissante sur $[-3\,;2]$.
2. $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x}{2} - (2x\mathrm{e}^{x-1} + x^2\mathrm{e}^{x-1}) \\ &= x - 2x\mathrm{e}^{x-1} - x^2\mathrm{e}^{x-1} \\ &= x(1 - 2\mathrm{e}^{x-1} - x\mathrm{e}^{x-1}) \\ &= x(1 - \mathrm{e}^{x-1}(2+x)) \\ &= x \times g(x) \end{aligned}$$

3. (a) $g'(x) = -(\mathrm{e}^{x-1} + (x+2)\mathrm{e}^{x-1}) = (-x-3)\mathrm{e}^{x-1}$.
$g'(x) = 0 \iff x = -3$ car $\mathrm{e}^{x-1} > 0$ sur $\mathbb{R}$.
On a donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
Signe de $(-x-3)$		$+$	0	$-$	
Signe de e^{x-1}		$+$		$+$	
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	

(b) On en déduit les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
Variations de g		$\nearrow$	$1+\mathrm{e}^{-4}$	$\searrow$	

Calcul : $g(-3) = 1 - (-3+2)\mathrm{e}^{-3-1} = 1 + \mathrm{e}^{-4}$

4. (a) On a :

$$\begin{aligned} x \leqslant -3 &\iff x+2 \leqslant -1 < 0 \\ &\iff (x+2)\mathrm{e}^{x-1} < 0 \\ &\iff -(x+2)\mathrm{e}^{x-1} > 0 \\ &\iff 1-(x+2)\mathrm{e}^{x-1} > 0 \end{aligned}$$

On a bien $g(x) > 0$ si $x \leqslant -3$.

(b) $g(1) = 1 - (1+2)\mathrm{e}^{1-1} = 1 - 3 = -2$. Comme g est strictement décroissante sur $[-3\,;+\infty[$, alors : si $x > 1$, alors $g(x) < 0$.

(c) La fonction g est strictement négative sur $]-\infty\,;-3]$ et strictement positive sur $[1\,;+\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ n'admet donc aucune solution sur ces intervalles.

Comme g est continue et strictement décroissante sur $[-3\,;1]$, et qu'elle y varie entre $1+\mathrm{e}^{-4}$ et -2 alors, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution sur cet intervalle.

(d) D'après la calculatrice : $0,20 < \alpha < 0,21$.

(e) On en déduit le tableau de signes de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$+$	0	$-$	

5. (a)

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de x		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(b) On en déduit les variations de la fonction f :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
Variations de f		$\searrow$	0	$\nearrow$	0.002	$\searrow$	

Calculs :

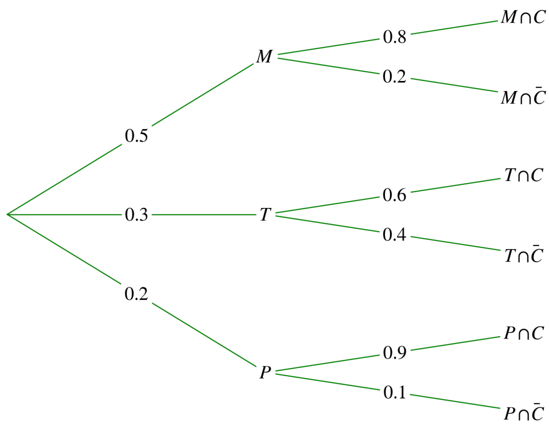
- $f(0) = \frac{0^2}{2} - 0^2e^{0-1} = 0\,;$
- $f(\alpha) \approx f(0.20) = \frac{0.20^2}{2} - 0.20^2\mathrm{e}^{0.20-1} \approx 0.002.$

(c) On remarque donc que la fonction f n'est pas strictement décroissante sur tout l'intervalle $[-3;2]$. La conjecture de départ est fausse.

Exercice 3 - Probabilités

D'après le baccalauréat Pondichéry, Mars 2011.

1. D'après l'énoncé, $\mathrm{P}(T) = 0,3$ et $\mathrm{P}_T(C) = 0,6$.
2.



3. (a) $M \cap C$ « Le client prend un assortiment de macarons et un café ».
   $\mathrm{P}(M \cap C) = \mathrm{P}(M) \times \mathrm{P}_M(C) = 0,5 \times 0,8 = 0,4$.

   (b) M, T et P forment une partition de l'univers. D'après la loi des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(C) &= \mathrm{P}(M \cap C) + \mathrm{P}(T \cap C) + \mathrm{P}(P \cap C)\\ &= 0,4 + 0,3 \times 0,6 + 0,2 \times 0,9\\ &= 0,4 + 0,18 + 0,18\\ &= 0,76\end{aligned}$$

4. $\mathrm{P}_C(M) = \dfrac{\mathrm{P}(M \cap C)}{\mathrm{P}(C)} = \frac{0,4}{0,76} \approx 0,53$.

5. (a) La somme totale dépensée par un client peut valoir 18€, 20€, 24€, 25€, 26€ ou 27€.

   (b)

Sommes s_i	18	20	24	25	26	27
$\mathrm{P}(s_i)$	$0,02$	$0,18$	$0,1$	$0,12$	$0,4$	$0,18$

   (c)

$\mathrm{E}(S) = 18 \times 0,02 + 20 \times 0,18 + 24 \times 0,1 + 25 \times 0,12 + 26 \times 0,4 + 27 \times 0,18$
$\mathrm{E}(S) = 24,62$

Cela signifie qu'un client du restaurant dépensera en moyenne $24,62$€ pour un repas.