Devoir Surveillé 8 - Correction

Démonstration exigible

1. Le coefficient binomial $\binom{n+1}{k+1}$ est égal au nombre de chemins conduisant à $(k+1)$ succès sur $(n+1)$ tirages.
2. (a) Dans le schéma de Bernoulli choisi, il y a $\binom{n}{k}$ chemins qui commencent par un succès et qui conduisent à $(k+1)$ succès au total.

   (b) Dans le schéma de Bernoulli choisi, il y a $\binom{n}{k+1}$ chemins qui commencent par un échec et qui conduisent à $(k+1)$ succès au total.
3. On conclut : il y a donc $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ chemins qui conduisent à $(k+1)$ succès au total dans un schéma de Bernoulli de taille $(n+1)$, donc :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Exercice 1 - Suites

1. u est constante si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} = u_n &\iff 2u_n + 6 = u_n \\ &\iff u_n = -6 \end{aligned}$$

   On conclut : u est constante si et seulement si $u_0 = -6$.

2. (a) On calcule :
   - $u_1 = 2 \times u_0 + 6 = 2 \times 3 + 6 = 12$;
   - $u_2 = 2 \times u_1 + 6 = 2 \times 12 + 6 = 30$;
   - $u_3 = 2 \times u_2 + 6 = 2 \times 30 + 6 = 66$;
   - $u_4 = 2 \times u_3 + 6 = 2 \times 66 + 6 = 138$;
   - $u_5 = 2 \times u_4 + 6 = 2 \times 138 + 6 = 282$.

   (b) On peut conjecturer que la suite u est strictement croissante et que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
3. (a) On a : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 6 \\ &= 2u_n + 6 + 6 \\ &= 2u_n + 12 \\ &= 2 \times (u_n + 6) \\ &= 2 \times v_n \end{aligned}$$

   On conclut donc que v est géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = u_0 + 6 = 9$.

(b) On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 9 \times 2^n$. De plus :

$$\begin{aligned} v_n = u_n + 6 &\iff u_n = v_n - 6 \\ &\iff u_n = 9 \times 2^n - 6 \end{aligned}$$

(c) On a : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2u_n + 6 - u_n \\ &= u_n + 6 \\ &= 9 \times 2^n - 6 + 6 \\ &= 9 \times 2^n > 0 \end{aligned}$$

On en déduit que u est strictement croissante.

4. (a) Voici une proposition d'algorithme :

$u \longleftarrow 3$
$n \longleftarrow 0$
Tant que $u \leqslant 100$
$\lvert u \longleftarrow 2 \times u + 6$
$\lvert n \longleftarrow n + 1$
Fin Tant que

(b) D'après la calculatrice, ou bien d'après les calculs effectués dans la question **1**, la valeur de n renvoyée est $n = 4$.

5. Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $n > 1$, donc 2^n est un multiple de 2. Ainsi, 9×2^n est un multiple de 18, et donc un multiple de 6.
Comme $6|(9 \times 2^n)$ et $6|6$ (trivial), alors $6|(9 \times 2^n - 6)$, d'où $6|u_n$.

Exercice 2 - Probabilités

Partie A

1. Comme le choix est assimilé à un tirage avec remise, on se place dans un schéma de Bernoulli. X compte le nombre de succès dans ce schéma, donc elle suit la loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 0{,}2$.
2. La probabilité pour qu'exactement 110 bouteilles de cet échantillon de 500 bouteilles soient de « pur jus » vaut :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X = 110) &= \binom{500}{110} \times 0{,}2^{110} \times 0{,}8^{390} \\ &\approx 0{,}023. \end{aligned}$$

3. La probabilité pour qu'au moins 75 bouteilles de cet échantillon de 500 bouteilles soient de « pur jus » vaut :

$$\mathrm{P}(X \geqslant 75) \approx 0{,}998.$$

4. Le nombre moyen de bouteilles « pur jus » du lot correspond à l'espérance de X, qui vaut : $\mathrm{E}(X) = 500 \times 0{,}2 = 100$.

Partie B

1. On se place ici dans un schéma de Bernoulli, car les tirages qui constituent l'échantillon sont identiques et indépendants. La variable aléatoire Y qui compte le nombre de bouteilles conformes suit donc la loi $\mathcal{B}(900\,;0{,}9)$.

   On détermine d'abord, à l'aide de la calculatrice, la plus petite valeur du nombre entier naturel a telle que $\mathrm{P}(Y \leqslant a) > 0{,}025$. À l'aide de la calculatrice, on trouve que :
   - $\mathrm{P}(Y \leqslant 791) \approx 0{,}022 < 0{,}025$;
   - $\mathrm{P}(Y \leqslant 792) \approx 0{,}028 > 0{,}025$.

   On en tire ainsi que $a = 792$.

   On détermine ensuite, à l'aide de la calculatrice, la plus petite valeur du nombre entier naturel b telle que $\mathrm{P}(Y \leqslant b) \geqslant 0{,}975$. À l'aide de la calculatrice, on trouve que :
   - $\mathrm{P}(Y \leqslant 826) \approx 0{,}969 < 0{,}975$;
   - $\mathrm{P}(Y \leqslant 827) \approx 0{,}977 > 0{,}975$.

   On en tire ainsi que $b = 827$.

   On en tire ainsi un intervalle de fluctuation de la fréquence de bouteilles contenant moins de 2% de pulpe au seuil de 95% :

   $$I_F = \left[\frac{792}{900}\,;\frac{827}{900}\right] \approx [0{,}88\,;0{,}92].$$

2. La fréquence de bouteilles conformes observée vaut : $f = \dfrac{766}{900} \approx 0{,}851$. Cette fréquence n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation déterminé précédemment, on conclut donc que l'affirmation du fournisseur est fausse, au risque de se tromper de 5%.

Exercice 3 - Dérivation

1. f est une somme d'une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ et de la fonction racine carrée dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$; f est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

   $$\begin{aligned} f'(x) &= 7x^6 - 7 \times 2x + 1 - 0 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= 7x^6 - 14x + 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

2. g est un produit de deux fonctions : une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ et le produit d'un nombre réel par la fonction inverse dérivable sur $\mathbb{R}^*$; g est donc dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
   $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) = u(x) \times v(x)$ avec :

   $$\begin{cases} u(x) = x^3 - x^2 + x + 1 \quad \text{donc} \quad u'(x) = 3x^2 - 2x + 1 \\ v(x) = \dfrac{3}{x} \quad \text{donc} \quad v'(x) = -\dfrac{3}{x^2} \end{cases}$$

D'après la formule du cours : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned}
g'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\
&= (3x^2 - 2x + 1) \times \frac{3}{x} + (x^3 - x^2 + x + 1) \times \frac{-3}{x^2} \\
&= \frac{9x^2 - 6x + 3}{x} + \frac{-3x^3 + 3x^2 - 3x - 3}{x^2} \\
&= \frac{9x^3 - 6x^2 + 3x - 3x^3 + 3x^2 - 3x - 3}{x^2} \\
&= \frac{6x^3 - 3x^2 - 3}{x^2}.
\end{aligned}$$

3. h est un quotient de deux fonctions polynômes, et est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, excepté lorsque son dénominateur s'annule.
   $h(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec :

$$\begin{cases} u(x) = 3x^2 - 2x + 1 \ \text{ donc } \ u'(x) = 6x - 2 \\ v(x) = -5x^2 - 10x + 12 \ \text{ donc } \ v'(x) = -10x - 10 \end{cases}$$

   On a alors : $v(x) = 0 \iff -5x^2 - 10x + 12 = 0$.
   Le discriminant vaut : $\Delta = (-10)^2 - 4 \times (-5) \times 12 = 340 > 0$ donc il y a deux solutions :
   $x_1 = \dfrac{10 - \sqrt{340}}{2 \times (-5)} = \dfrac{-10 + \sqrt{340}}{10} = \dfrac{-5 + \sqrt{85}}{5}$
   et $x_2 = \dfrac{10 + \sqrt{340}}{2 \times (-5)} = \dfrac{-10 - \sqrt{340}}{10} = \dfrac{-5 - \sqrt{85}}{5}$.
   On en tire que h est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \backslash \{x_1\,; x_2\}$.
   D'après la formule du cours : $\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{x_1\,; x_2\}$,

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2} \\
&= \frac{(6x - 2) \times (-5x^2 - 10x + 12) - (3x^2 - 2x + 1) \times (-10x - 10)}{(-5x^2 - 10x + 12)^2} \\
&= \frac{-30x^3 - 60x^2 + 72x + 10x^2 + 20x - 24}{(-5x^2 - 10x + 12)^2} \\
&\quad - \frac{-30x^3 - 30x^2 + 20x^2 + 20x - 10x - 10}{(-5x^2 - 10x + 12)^2} \\
&= \frac{-30x^3 - 50x^2 + 92x - 24}{(-5x^2 - 10x + 12)^2} + \frac{30x^3 + 10x^2 - 10x + 10}{(-5x^2 - 10x + 12)^2} \\
&= \frac{-40x^2 + 82x - 14}{(-5x^2 - 10x + 12)^2}.
\end{aligned}$$