Chapitre 15

Convexité

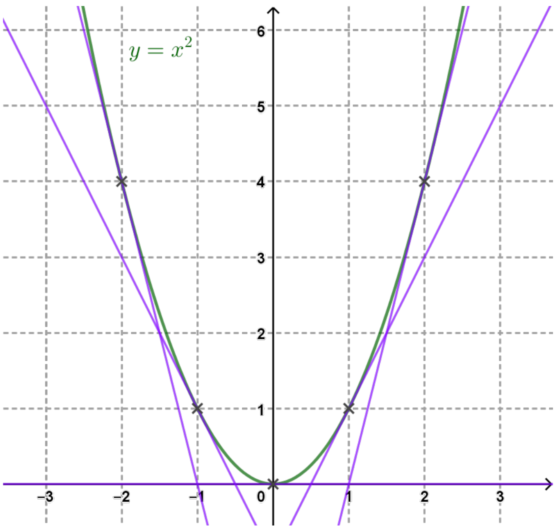
15.1 Fonctions convexes et concaves

Définition. *Une fonction f dérivable sur un intervalle I est dite :*

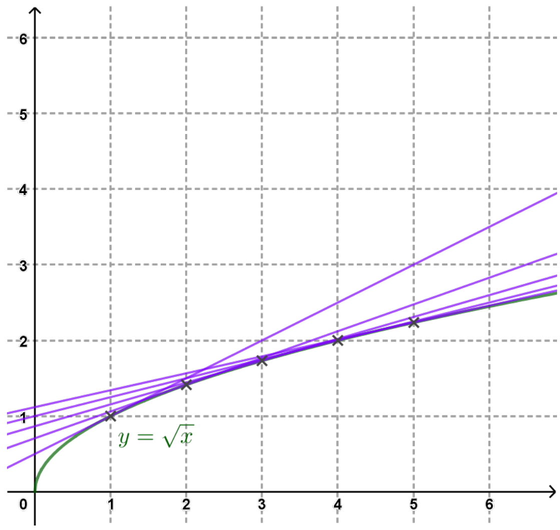
- ***convexe*** *sur I si sa courbe représentative est située au-dessus de chacune de ses tangentes sur cet intervalle ;*
- ***concave*** *sur I si sa courbe représentative est située au-dessous de chacune de ses tangentes sur cet intervalle.*

Exemples.

- *La fonction carré est convexe sur $\mathbb{R}$.*



- *La fonction racine carrée est concave sur* $\mathbb{R}_+^*$.



15.2 Étude analytique de la convexité

15.2.1 Lien entre convexité et dérivée

Propriété. *Une fonction f dérivable sur un intervalle I est :*

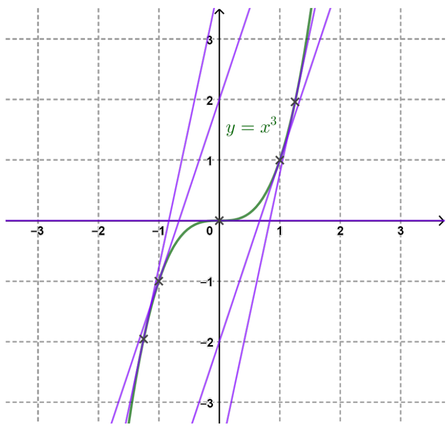
- *convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I ;*
- *concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I.*

Exemple. *La fonction cube $f : x \mapsto x^3$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.*

On a : $f'(x) = 3x^2$ et :

- *f' est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$, donc f est concave sur cet intervalle ;*
- *f' est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc f est convexe sur cet intervalle.*

On vérifie cela graphiquement.



15.2.2 Lien entre convexité et dérivée seconde

Définition. *Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I telle que sa dérivée f' est également dérivable sur I, alors on note f'' et on appelle* ***dérivée seconde de*** *f la fonction dérivée de f'.*

Propriété. *Une fonction f dérivable sur un intervalle I est :*

- *convexe sur I si et seulement si $f''(x) \geqslant 0$ sur I ;*
- *concave sur I si et seulement si $f''(x) \leqslant 0$ sur I.*

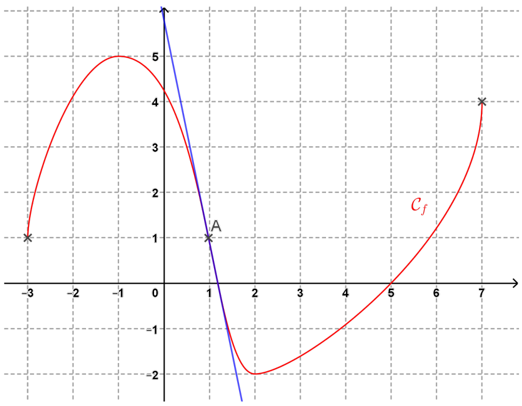
15.3 Point d'inflexion

Définition. *Pour toute fonction f définie et dérivable sur un invervalle I, de courbe représentative $\mathcal{C}_f$ sur cet intervalle, on dit qu'un point A de $\mathcal{C}_f$ est un* ***point d'inflexion*** *de $\mathcal{C}_f$ si, au point A, la courbe $\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente en A.*

Propriété. *La courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I admet un point d'inflexion en $\mathrm{A}(a\,;f(a))$ si et seulement si f passe de concave à convexe (ou inversement) en $x = a$.*

Exemples.

- *La courbe $\mathcal{C}_f$ ci-contre, représentant une fonction f définie et dérivable sur $[-3\,;7]$, admet un point d'inflexion $\mathrm{A}(1\,;1)$, car f est concave sur $[-3\,;1]$ et convexe sur $[1\,;7]$.*



- *La courbe de la fonction cube admet un point d'inflexion en $\mathrm{O}(0\,;0)$ car elle traverse sa tangente en ce point, et elle passe de concave à convexe en $x = 0$.*