Chapitre 15 - Convexité

Paul DARTHOS

Lycée Jaufré RUDEL - BLAYE

8 mai 2018

▸ Graphiquement...

Fonctions convexes et concaves

Définition

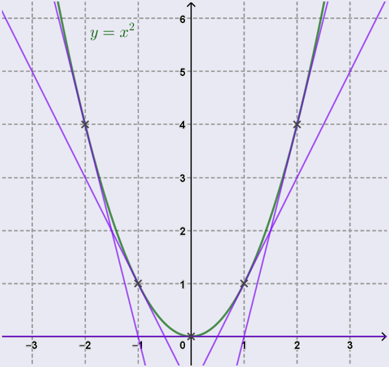
Une fonction f dérivable sur un intervalle I est dite :

- ***convexe** sur I si sa courbe représentative est située au-dessus de chacune de ses tangentes sur cet intervalle ;*
- ***concave** sur I si sa courbe représentative est située au-dessous de chacune de ses tangentes sur cet intervalle.*

Exemple 1

Exemple

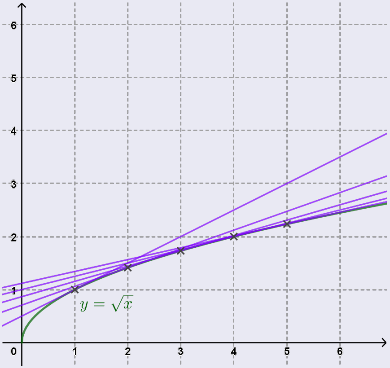
La fonction carré est convexe sur $\mathbb{R}$.



Exemple 2

Exemple

La fonction racine carrée est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.



Lien entre convexité et dérivée

Propriété

Une fonction f dérivable sur un intervalle I est :

- *convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I ;*
- *concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I.*

Exemple : la fonction cube

Exemple

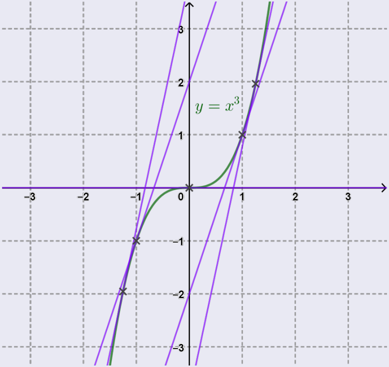
La fonction cube $f : x \mapsto x^3$ *est définie et dérivable sur* $\mathbb{R}$.
On a : $f'(x) = 3x^2$ *et :*

- f' *est strictement décroissante sur* $]-\infty\,;0]$, *donc* f *est concave sur cet intervalle ;*
- f' *est strictement croissante sur* $[0\,;+\infty[$, *donc* f *est convexe sur cet intervalle.*

Exemple : la fonction cube

Exemple

On vérifie cela graphiquement.



Dérivée seconde d'une fonction

Définition

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I telle que sa dérivée f' est également dérivable sur I, alors on note f'' et on appelle ***dérivée seconde de*** *f la fonction dérivée de f'.*

Lien entre convexité et dérivée seconde

Propriété

Une fonction f dérivable sur un intervalle I est :

- *convexe sur I si et seulement si $f''(x) \geqslant 0$ sur I ;*
- *concave sur I si et seulement si $f''(x) \leqslant 0$ sur I.*

Point d'inflexion

Définition

Pour toute fonction f définie et dérivable sur un invervalle I, de courbe représentative $\mathcal{C}_f$ sur cet intervalle, on dit qu'un point A de $\mathcal{C}_f$ est un ***point d'inflexion*** *de $\mathcal{C}_f$ si, au point A, la courbe $\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente en A.*

Point d'inflexion et convexité

Propriété

La courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I admet un point d'inflexion en $\mathrm{A}(a\,;f(a))$ si et seulement si f passe de concave à convexe (ou inversement) en $x = a$.

Exemple 1

Exemple

La courbe $\mathcal{C}_f$ *ci-dessous, représentant une fonction* f *définie et dérivable sur* $[-3\,;7]$*, admet un point d'inflexion* $\mathrm{A}(1\,;1)$*, car* f *est concave sur* $[-3\,;1]$ *et convexe sur* $[1\,;7]$.

Exemple 2

Exemple

La courbe de la fonction cube admet un point d'inflexion en $\mathrm{O}(0\,;0)$ *car elle traverse sa tangente en ce point, et elle passe de concave à convexe en* $x = 0$.