Baccalauréat Économique et Social 2018

Épreuve de Mathématiques - Correction

Candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité

Paul DARTHOS

Exercice 1

Partie A

1. (a) La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(45\,;12)$ qui est **continue** ; ainsi $\mathrm{P}(X = 10) = 0$.

   (b) Comme l'espérance de la loi normale suivie par X vaut $\mu = 45$, on a : $\mathrm{P}(X \geqslant 45) = 0{,}5$.

   (c) On a : $\mathrm{P}(21 \leqslant X \leqslant 69) = \mathrm{P}(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0{,}954$, ce que l'on peut vérifier à l'aide de la calculatrice.

   (d) En utilisant les propriétés de symétrie de la courbe représentative de la fonction de densité de la loi normale, on a :
   $\mathrm{P}(21 \leqslant X \leqslant 45) = \dfrac{1}{2}\mathrm{P}(21 \leqslant X \leqslant 69) \approx 0{,}477$, ce que l'on peut vérifier à l'aide de la calculatrice.

2. La probabilité qu'un client passe entre 30 et 60 minutes dans ce supermarché vaut, à l'aide de la calculatrice :
$$\mathrm{P}(30 \leqslant X \leqslant 60) \approx 0{,}789.$$

3. En s'aidant de la calculatrice, on trouve que la valeur du nombre réel a telle que $\mathrm{P}(X \leqslant a) = 0{,}30$ est : $a \approx 39$. Cela signifie qu'il y a 30% de chances que le client passe moins de 39 minutes dans le supermarché.

Partie B

1. Un intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la proportion de clients satisfaits des produits du supermarché pour un échantillon de 300 clients est :
$$\begin{aligned} I_F &= \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p \times (1-p)}}{\sqrt{n}}\,;p + 1{,}96\frac{\sqrt{p \times (1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \\ &= \left[0{,}89 - 1{,}96\frac{0{,}89 \times 0{,}11}{\sqrt{300}}\,;0{,}89 + 1{,}96\frac{0{,}89 \times 0{,}11}{\sqrt{300}}\right] \\ &\approx [0{,}854\,;0{,}926] \end{aligned}$$

2. D'après l'enquête réalise, la fréquence de clients satisfaits est :
$$f = \frac{286}{300} \approx 0{,}953.$$

3. Comme la fréquence de clients satisfaits n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation déterminé précédemment, on peut affirmer, au risque de se tromper de 5%, que le taux de satisfaction a significativement progressé entre 2013 et 2018.

Exercice 2

Partie A

1. **Réponse a.** Il s'agit de la définition du cours.
2. **Réponse b.** Comme S et $\overline{S}$ forment une partition de l'univers, en vertu de la loi des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(F) &= \mathrm{P}(S \cap F) + \mathrm{P}(\overline{S} \cap F) \\ &= \mathrm{P}(S) \times \mathrm{P}_S(F) + \mathrm{P}(\overline{S}) \times \mathrm{P}_{\overline{S}}(F) \\ &= 0{,}3 \times 0{,}4 + 0{,}7 \times 0{,}5 \\ &= 0{,}47\end{aligned}$$

Ainsi, on a : $\mathrm{P}_F(S) = \dfrac{\mathrm{P}(F \cap S)}{\mathrm{P}(F)} = \dfrac{0{,}3 \times 0{,}4}{0{,}47} \approx 0{,}255.$

Partie B

1. **Réponse b.** g est dérivable sur $[-1\,;4]$ en tant que fonction polynôme, et : $\forall x \in [-1\,;4]$, $g'(x) = -3x^2 + 6x$. Ainsi, $g'(1) = -3 \times 1^2 + 6 \times 1 = 3$.
Par ailleurs, $g(1) = -1^3 + 3 \times 1^2 - 1 = 1$.
Ainsi, une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 1 est :

$$\begin{aligned}y = g'(1) \times (x-1) + g(1) &\iff y = 3 \times (x-1) + 1 \\ &\iff y = 3x - 3 + 1 \\ &\iff y = 3x - 2\end{aligned}$$

2. **Réponse b.** Par définition, la valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[-1\,;a]$ vaut :

$$\begin{aligned}m &= \frac{1}{a-(-1)} \times \int_{-1}^{a} g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{a+1} \times \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3 - x\right]_{-1}^{a} \\ &= \frac{1}{a+1} \times \left[-\frac{1}{4} \times a^4 + a^3 - a - \left(-\frac{1}{4} \times (-1)^4 + (-1)^3 - (-1)\right)\right] \\ &= \frac{1}{a+1} \times \left[-\frac{1}{4} \times a^4 + a^3 - a + \frac{1}{4} - 1 + 1\right] \\ &= \frac{1}{a+1} \times \left[-\frac{1}{4} \times a^4 + a^3 - a + \frac{1}{4}\right]\end{aligned}$$

En remplaçant a par chacune des valeurs proposées, on trouve que $m = 0$ si et seulement si $a = 1$.

Exercice 3

1. (a) Le niveau d'eau du lac le 2 janvier 2018 à midi, en centimètre, était le suivant :

$$\begin{aligned} u_1 &= 1{,}06 \times 605 - 15 \\ &= 626{,}3 \end{aligned}$$

   (b) On note u_{n+1} le niveau d'eau du lac, en centimètre, $(n+1)$ jours après le 1[er] janvier 2018. D'un jour à l'autre, la hauteur augmente de 6%, ce qui revient à multiplier le niveau précédent u_n par 1,06. De plus, une baisse de 15 centimètres est ensuite observée, ce qui est traduit par le retrait de 15 à la valeur obtenue.
   En conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1{,}06u_n - 15$.

2. (a) On a, pour tout nombre entier naturel n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 250 \\ &= 1{,}06u_n - 15 - 250 \\ &= 1{,}06u_n - 265 \\ &= 1{,}06 \times (u_n - 250) \\ &= 1{,}06 \times v_n \end{aligned}$$

   On en tire que (v_n) est géométrique de raison 1,06, son premier terme vaut $v_0 = u_0 - 250 = 605 - 250 = 355$.

   (b) Une expression de v_n en fonction de n est donc : $v_n = 355 \times 1{,}06^n$.
   On a alors, pour tout nombre entier naturel n :

$$\begin{aligned} v_n = u_n - 250 &\iff u_n = v_n + 250 \\ &\iff u_n = 355 \times 1{,}06^n + 250 \end{aligned}$$

3. (a) Comme $1{,}06 > 1$, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} 1{,}06^n = +\infty$.
   On en tire : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} (355 \times 1{,}06^n + 250) = +\infty$.

   (b) L'équipe d'entretien devra ouvrir les vannes, car le niveau d'eau tend vers l'infini ; il dépassera 10 mètres (soit 1000 centimètres) au bout d'un certain nombre de jours.

4. (a)

```
N ⟵ 0
U ⟵ 605
Tant que U < 1000 faire
  U ⟵ 1,06 × U − 15
  N ⟵ N + 1
Fin Tant que
```

   (b) À la fin de l'exécution de l'algorithme, la variable N contient la valeur 13.

   (c) Cela signifie que les techniciens devront intervenir 13 jours après le 1[er] janvier 2018, soit le 14 janvier 2018.

Exercice 4

1. f est dérivable sur $[-2\,;4]$ en tant que somme de deux fonctions : le produit d'une fonction affine et d'une composée de l'exponentielle par une fonction linéaire, et une fonction constante, toutes dérivables sur cet intervalle. Pour tout nombre réel $x \in [-2\,;4]$, $f(x) = u(x) \times v(x) + 4$, avec :

$$\begin{cases} u(x) = 2x+1 \quad \text{donc} \quad u'(x) = 2 \\ v(x) = \mathrm{e}^{-2x} \quad \text{donc} \quad v'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x} \end{cases}$$

Ainsi, pour tout nombre réel $x \in [-2\,;4]$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) + 0 \\ &= 2 \times \mathrm{e}^{-2x} + (2x+1) \times (-2\mathrm{e}^{-2x}) \\ &= \mathrm{e}^{-2x} \times (2 - 2 \times (2x+1)) \\ &= \mathrm{e}^{-2x} \times (2 - 4x - 2) \\ &= -4x\mathrm{e}^{-2x} \end{aligned}$$

2. On détermine les valeurs d'annulation de $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff -4x\mathrm{e}^{-2x} = 0 \\ &\iff -4x = 0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{e}^{-2x} = 0 \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$

De plus, pour tout nombre réel $x \in [-2\,;4]$, on a : $\mathrm{e}^{-2x} > 0$. Ainsi, $f'(x)$ est du même signe que $-2x$, qui est une fonction affine strictement décroissante. On en tire le tableau de signes de $f'(x)$ et de variations de f :

x	-2		0		4
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$f(-2)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$f(4)$

Calculs :
- $f(-2) = (2 \times (-2) + 1) \times \mathrm{e}^{-2\times(-2)} + 3 = -3\mathrm{e}^4 + 3$;
- $f(0) = (2 \times 0 + 1) \times \mathrm{e}^{-2\times 0} + 3 = 1 + 3 = 4$;
- $f(4) = (2 \times 4 + 1) \times \mathrm{e}^{-2\times 4} + 3 = 9\mathrm{e}^{-8} + 3$.

3. La fonction f est continue et strictement croissante sur $[-2\,;0]$; elle y varie entre $f(-2) \approx -160{,}79 < 0$ et $f(0) = 4 > 0$. En vertu du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur cet intervalle.

En s'aidant de la calculatrice, on trouve : $\alpha \approx -0{,}8$.

4. (a) On détermine les valeurs d'annulation de $f''(x)$:

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\iff (8x-4)\mathrm{e}^{-2x} = 0 \\ &\iff 8x - 4 = 0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{e}^{-2x} = 0 \\ &\iff x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

De plus, pour tout nombre réel $x \in [-2\,;4]$, on a : $\mathrm{e}^{-2x} > 0$. Ainsi, $f''(x)$ est du même signe que $(8x-4)$, qui est une fonction affine strictement croissante.

On en tire le tableau de signes de $f''(x)$:

x	-2		$\frac{1}{2}$		4
Signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	

(b) f est convexe si et seulement si $f''(x) \geqslant 0$; ainsi, par lecture du tableau de signes de $f''(x)$, on en déduit que le plus grand intervalle inclus dans $[-2\,;4]$ sur lequel f est convexe est $\left[\dfrac{1}{2}\,;4\right]$.

5. (a) G est dérivable sur $[-2\,;4]$ en tant que produit de deux fonctions dérivables sur cet intervalle : une fonction affine et une composée de l'exponentielle par une fonction linéaire. Pour tout nombre réel $x \in [-2\,;4]$, $G(x) = u(x) \times v(x)$, avec :

$$\begin{cases} u(x) = -x-1 \quad \text{donc} \quad u'(x) = -1 \\ v(x) = \mathrm{e}^{-2x} \quad \text{donc} \quad v'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x} \end{cases}$$

Ainsi, pour tout nombre réel $x \in [-2\,;4]$,

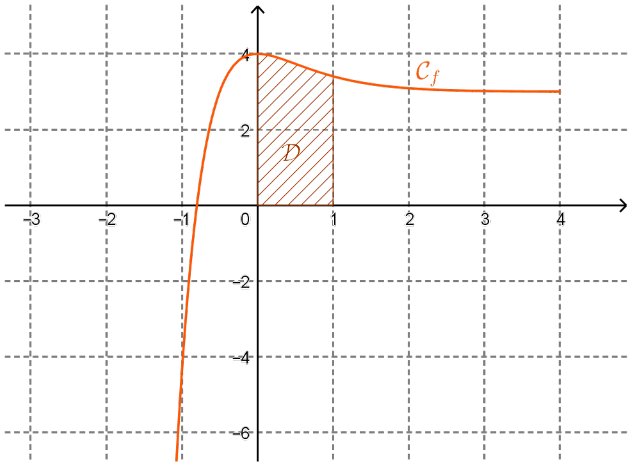
$$\begin{aligned} G'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= -1 \times \mathrm{e}^{-2x} + (-x-1) \times \left(-2\mathrm{e}^{-2x}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-2x} \times [-1 - 2 \times (-x-1)] \\ &= \mathrm{e}^{-2x} \times (-1 + 2x + 2) \\ &= (2x+1)\mathrm{e}^{-2x} \\ &= g(x) \end{aligned}$$

On en tire que G est bien une primitive de g sur $[-2\,;4]$.

(b) On observe que, pour tout nombre réel $x \in [-2\,;4]$, $f(x) = g(x) + 3$.
Ainsi, une primitive F de f sur $[-2\,;4]$ est :

$$F(x) = G(x) + 3x = (-x-1)\mathrm{e}^{-2x} + 3x.$$

6. (a)



(b) Par lecture graphique, en tenant compte de l'échelle (une graduation horizontale correspond à une unité en abscisse, une graduation verticale correspond à deux unités en ordonnée), on a : $3 < \mathcal{A} < 4$.

(c) On calcule la valeur de A :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= [F(x)]_0^1 \\
&= F(1) - F(0) \\
&= (-1-1)\mathrm{e}^{-2\times 1} + 3\times 1 - ((-0-1)\mathrm{e}^{-2\times 0} + 3\times 0) \\
&= -2\mathrm{e}^{-2} + 3 - (-1) \\
&= 4 - 2\mathrm{e}^{-2} u.a. \quad \text{(valeur exacte)} \\
&\approx 3{,}73 u.a. \quad \text{(valeur approchée)}
\end{aligned}
$$