DÉRIVATION DE FONCTIONS

1 Nombre dérivé

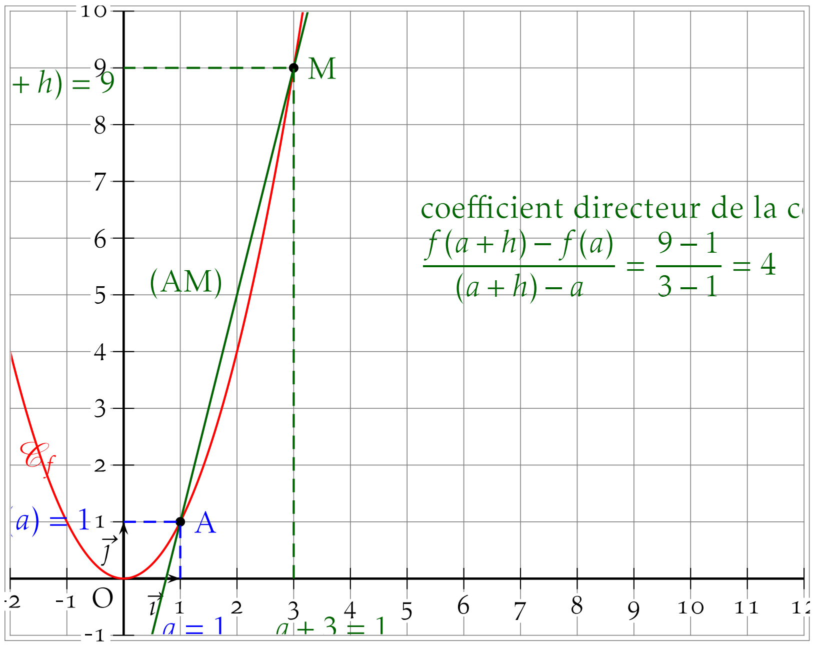
Définition 1

f est une fonction définie sur un intervalle I et a et $a+h$ sont deux nombres réels de I.
$A(a; f(a))$ et $M(a+h, f(a+h))$ sont les points de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f.
Le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ est le rapport :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Le taux d'accroissement correspond au coefficient directeur de la droite (AM).

Exemple 1



Définition 2

Si en faisant tendre h vers 0, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est un nombre, on dit que la fonction f **est dérivable en** a.
Le nombre obtenu est **le nombre dérivé de f en** a et on le note $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

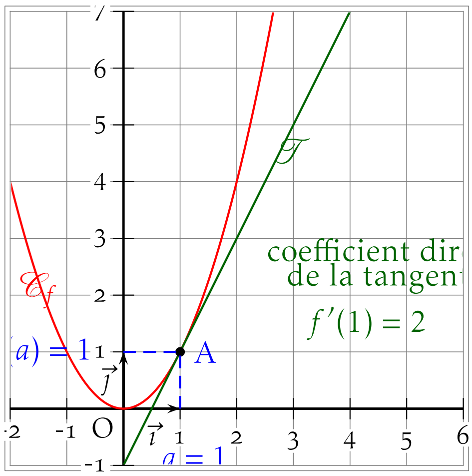
On note souvent $f'(a)$ en mathématiques (notation de LAGRANGE) ;
en physiques, on note plutôt $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ (notation de LEIBNIZ) ou $\dot{f}(a)$ pour une dérivation par rapport au temps (notation de NEWTON).

2 Tangente d'une courbe représentative d'une fonction

‡ Propriété 1

f est une fonction définie sur un intervalle I et a est un nombre réel de I.
Graphiquement, si la fonction f est dérivable en a, la courbe représentative de f admet au point $A(a; f(a))$ une **tangente** passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.

↪ Exemple 2



‡ Propriété 2

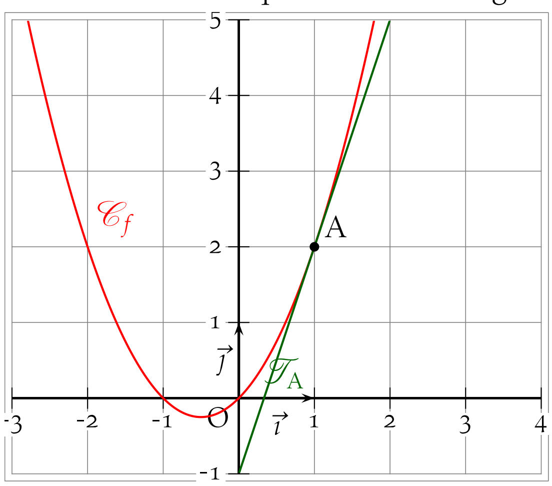
On suppose que f est dérivable en a. Alors la tangente en $A(a; f(a))$ a pour équation de droite :

$$y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$$

Remarque : La tangente est une droite qui « colle » « localement » la courbe représentative autour du point A.
Dans certaines disciplines, on remplace l'expression de la fonction par celle de sa tangente pour faire des approximations (*e.g.* : $\sin(x) \underset{x \to 0}{\approx} x$).

↪ Exemple 3

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $f : f(x) = x^2 + x$ on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}_A$ de $\mathscr{C}_f$ en $A(1; 2)$.



On trace tout d'abord la fonction, on place le point A et la tangente en A :
On lit graphiquement le coefficient directeur de la tangente $\mathscr{T}_A$: il vaut 3.
On a donc $f'(1) = 3$.
L'équation de la tangente est : $y = f'(1) \times (x - 1) + f(1)$.
On a vu que $f'(1) = 3$ et $f(1) = 1^2 + 1 = 2$, donc :
$y = 3 \times (x - 1) + 2 = 3x - 3 + 2 = 3x - 1$.

3 Fonction dérivée

Définition 3

On suppose que la fonction f est dérivable en x pour tout x de l'intervalle I : on dit alors que f **est dérivable sur** I.
On peut définir alors une nouvelle fonction sur I, appelée **fonction dérivée** :

$$x \mapsto f'(x)$$

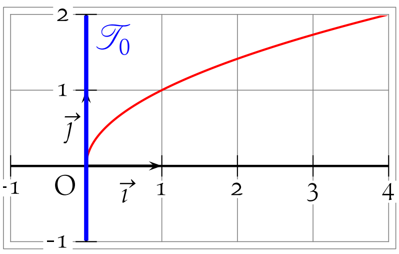
On donne quelques fonctions dérivées de fonctions usuelles

« Type » de fonction à dériver	Ensemble de dérivation	Expression de la fonction à dériver	Expression de la fonction dérivée
Constante	$\mathbb{R}$	k	0
Affine	$\mathbb{R}$	$ax+b$	a
Carrée	$\mathbb{R}$	x^2	$2x$
Cube	$\mathbb{R}$	x^3	$3x^2$
Puissance	$\mathbb{R}$	x^n	nx^{n-1}
Inverse	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
Racine carrée	$]0;+\infty[$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Remarque : Bien que la fonction racine carrée soit définie en 0 : $\sqrt{0}=0$, cette fonction n'est pas dérivable en 0.

4 Exemple de fonction non dérivable en un point

On s'intéresse à la fonction racine carrée, et on va s'intéresser au nombre dérivé en 0 :



On trace la tangente à la courbe en O(0; 0).
La tangente est l'axe des ordonnées, d'équation $x=0$.
Or une telle droite est « verticale », et on sait qu'elle n'a *pas* de coefficient directeur, ce qui signifierait que le nombre dérivé en 0 *n'existe pas*.

On va chercher à faire le calcul (avec $h>0$) :
$\frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}-0}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$
Si on fait tendre h vers 0, on constate que $\frac{1}{\sqrt{h}}$ devient de plus en plus « grand » ; on dit alors : $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$. Ce n'est donc pas un nombre, la fonction racine carrée n'est donc pas dérivable en 0.

Propriété 3

- La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.
- La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

5 Dérivés et opérations

Dans cette section, u et v seront deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

‡ Propriété 4
On définit la fonction $u+v$ par $(u+v)(x)=u(x)+v(x)$.
La fonction somme $u+v$ est dérivable sur I.
La dérivée d'une somme est égale à la somme des dérivés :
$(u+v)'(x)=u'(x)=v'(x)$ ou $(u+v)'=u'+v'$.

Exemple :
Dériver la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x+\sqrt{x}$.
On ne sait pas dériver f a priori.
Cependant, on remarque f est la somme de deux fonctions : « x » et « $\sqrt{x}$ ».
On note $u(x)=x$ et $v(x)=\sqrt{x}$.
On a donc $f(x)=u(x)+v(x)$, ce que l'on peut noter aussi : $f=u+v$.
Ces deux fonctions sont bien dérivables sur $]0;+\infty[$:
$u'(x)=1$ et $v'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
Il ne reste qu'à appliquer la propriété :
$f'=(u+v)'=u'+v'$
$f'(x)=u'(x)+v'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

‡ Propriété 5
On définit la fonction produit $(u\times v)(x)$ par $(u\times v)(x)=u(x)\times v(x)$.
La fonction uv est dérivable sur I. On a la formule :
$(u\times v)'(x)=u'(x)\times v(x)+v'(x)\times u(x)$ ou $(u\times v)'=u'\times v+v'\times u$
$(uv)'=u'v+v'u$ (la même chose en ne faisant pas apparaître les signes « $\times$ »).

Remarque importante : La dérivée d'un produit N'EST PAS le produit des dérivées.

Exemple :
Dériver la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(2-3x)(5x+2)$.
On ne sait pas dériver f *a priori*.
Cependant, on remarque f est le produit de deux fonctions : « $2-3x$ » et « $5x+2$ ».
On note $u(x)=2-3x$ et $v(x)=5x+2$.
On a donc $f(x)=u(x)\times v(x)$, ce que l'on peut noter aussi : $f=u\times v$.
Ces deux fonctions sont bien dérivables sur $\mathbb{R}$: on reconnait des fonctions affines
$u'(x)=-3$ et $v'(x)=5$.
Il ne reste qu'à appliquer la propriété :
$f'=(u\times v)'=u'\times v+v'\times u$
$f'(x)=u'(x)\times v(x)+v'(x)\times u(x)$
$f'(x)=-3\times(5x+2)+5\times(2-3x)$
$f'(x)=-15x-6+10-15x=-30x+4$

‡ Propriété 6

k est un nombre réel. La fonction $k \times u$ est dérivable sur I et :
$(k \times u)'(x) = k \times u'(x)$ ou $(k \times u)' = k \times u'$ ou encore :
$(ku)' = ku'$

Exemple :
Dériver la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 7x^2$.
On ne sait pas dériver f a priori.
Cependant, on remarque que f est le produit du nombre réel 7 et de la fonction « x^2 ».
On note $k = 7$ et $u(x) = x^2$.
On a donc $f(x) = k \times u(x)$, ce que l'on peut noter aussi : $f = k \times u$.
La fonction u est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $u'(x) = 2x$
Il ne reste qu'à appliquer la propriété :
$f'(x) = k \times u'(x)$
$f'(x) = 7 \times 2x = 14x$

‡ Propriété 7

Le carré u^2 de la fonction u est dérivable sur I et :
$(u^2)' = 2 \times u' \times u$ ou encore :
$(u^2)' = 2u'u$

Exemple :
Dériver la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^3+1)^2$.
On ne sait pas dériver f a priori.
Cependant, on remarque que f est le carré de la fonction « $x^3 + 1$ ».
On note $u(x) = x^3 + 1$.
On a donc $f(x) = u(x)^2$, ce que l'on peut noter aussi : $f = u^2$.
La fonction u est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $u'(x) = 3x^2 + 0 = 3x^2$ en appliquant la règle : « la dérivée d'une somme est égale à la somme des dérivés ».
Il ne reste qu'à appliquer la propriété :
$f'(x) = 2 \times u'(x) \times u(x)$
$f'(x) = 2 \times 3x^2 \times (x^3+1) = 6x^2 \times (x^3+1) = 6x^5 + 6x^2$

‡ Propriété 8

On suppose que la fonction v ne s'annule pas sur I : pour tout x de I, $v(x) \neq 0$.
On peut alors définir la fonction $\frac{1}{v}$ par $\left(\frac{1}{v}\right)(x) = \frac{1}{v(x)}$.
L'inverse $\frac{1}{v}$ de la fonction v est alors dérivable sur I et :
$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

Exemple :
Dériver la fonction f définie sur $]1,5;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{2x-3}$.
On vérifie d'abord que la fonction est bien définie : elle a un dénominateur qui ne doit donc pas s'annuler.
Or celui-ci est nul si : $2x - 3 = 0$ c'est à dire $x = \frac{3}{2} = 1,5$.
1,5 n'appartient pas à l'ensemble de définition de f, la fonction est donc bien définie.
On ne sait pas dériver f a priori.
Cependant, on remarque que f est l'inverse de la fonction « $2x - 3$ ».
On note $v(x) = 2x - 3$.

On a donc $f(x) = \frac{1}{v(x)}$, ce que l'on peut noter aussi : $f = \frac{1}{v}$.
La fonction v est bien dérivable sur $]1,5;+\infty[$ et : $v'(x) = 2$.
Il ne reste qu'à appliquer la propriété :
$f'(x) = -\frac{v'(x)}{v^2(x)} = -\frac{2}{(2x-3)^2}$

‡ **Propriété 9**

On suppose que la fonction v ne s'annule pas sur I : pour tout x de I, $v(x) \neq 0$.
La fonction quotient $\dfrac{u}{v}$ est alors dérivable sur I et :

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \times v - v' \times u}{v^2}$ ou encore :

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

Exemple :
Dériver la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.
On vérifie d'abord que la fonction est bien définie : elle a un dénominateur qui ne doit donc pas s'annuler.
Or celui-ci est nul si : $x - 1 = 0$ c'est à dire $x = 1$.
1 n'appartient pas à l'ensemble de définition de f, la fonction est donc bien définie.
On ne sait pas dériver f a priori.
Cependant, on remarque que f est le quotient des fonctions « $2x + 1$ » et « $x - 1$ ».
On note $u(x) = 2x + 1$ et $v(x) = x - 1$.
On a donc $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, ce que l'on peut noter aussi : $f = \frac{u}{v}$.
Les fonctions u et v sont bien dérivables sur $]1;+\infty[$ et :
$u'(x) = 2$ et $v'(x) = 1$.
Il ne reste qu'à appliquer la propriété :
$f'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - v'(x) \times u(x)}{v(x)^2}$
$f'(x) = \frac{2 \times (x-1) - (1 \times (2x+1))}{(x-1)^2}$
$f'(x) = \frac{2x-2-(2x+1)}{(x-1)^2}$
$f'(x) = \frac{2x-2-2x-1}{(x-1)^2}$
$f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2}$