LE DEUXIÈME DEGRÉ

1 Les fonctions polynomiales du deuxième degré

Définition 1

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est **fonction polynomiale du deuxième degré** s'il existe des nombres réels $a \neq 0$, b et c tels que f admette pour expression :

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ pour tout nombre réel } x$$

La fonction polynomiale f est présentée ici sous **sa forme développée**.
On peut parler aussi de trinôme du deuxième degré.
a est appelé **le coefficient dominant** de la fonction f et c **le coefficient constant.**

Exemple 1

On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions f, g et h par :
$f(x) = -3x^2 + 2x + 5$, $g(x) = (2x+1)^2-6$ et $h(x) = 4-x^2$.

- f est une fonction polynomiale du deuxième degré avec $a = -3$, $b = 2$ et $c = 5$.
- On développe l'expression de $g(x)$: $g(x) = 4x^2 + 4x + 1-6 = 4x^2 + 4x-5$.
  g est une fonction polynomiale du deuxième degré avec $a = 4$, $b = 4$ et $c = -5$.
- h est une fonction polynomiale du deuxième degré avec $a = -1$, $b = 0$ et $c = 4$.

Propriété 1

La courbe représentative d'une fonction polynomiale du deuxième degré est une parabole.
On note a son coefficient dominant.

- Si $a < 0$, la parabole a « les branches vers le bas ».
- Si $a > 0$, la parabole a « les branches vers le haut ».

2 La fonction carrée

Définition 2

On considère a un nombre réel. **Le carré du nombre** a, noté a^2 est le produit de a par lui-même. Ainsi, $a^2 = a \times a$.

Propriété 2

Pour tous nombres réels a et b,

- $a^2 \geqslant 0$;
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
- $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$;
- $(ab)^2 = a^2b^2$.

‡ Propriété 3

- Pour un nombre positif a, **la racine carrée de** a est l'unique nombre positif solution de l'équation $X^2 = a$.
  Ainsi, si a est positif, $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.
- Pour a et b deux nombres positifs, on a la relation $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
  En particulier, si $a \geqslant 0$, $\sqrt{a^2} = a$.
- Pour a un nombre réel strictement positif, on a la relation $\sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$.

‡ Propriété 4

On considère a un nombre ou une expression.
L'équation $X^2 = a$, d'inconnue X, possède :

- aucune solution si $a < 0$: $S = \varnothing$;
- une solution si $a = 0$: $S = \{0\}$;
- deux solutions si $a > 0$: $S = \left\{\sqrt{a}; -\sqrt{a}\right\}$.

↪ Exemple 2

Résoudre l'équation $(x-1)^2 = 6$.
Comme $6 > 0$, on en déduit que $x-1 = \sqrt{6}$ ou $x-1 = -\sqrt{6}$,
d'où $x = -1 + \sqrt{6}$ ou $x = -1-\sqrt{6}$.
$S = \left\{-1 + \sqrt{6}; -1-\sqrt{6}\right\}$.

⊡ Définition 3

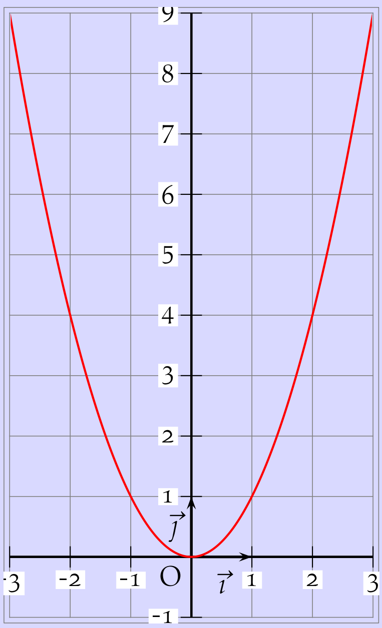
La fonction carrée est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2$.

‡ Propriété 5

La courbe représentative de la fonction carrée est une **parabole** qui possède un sommet de coordonnées $(0;0)$ et qui admet la droite d'équation $x = 0$ comme axe de symétrie.
La fonction carrée est décroissante sur $]-\infty;0]$ et est croissante sur $[0;+\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f	↘	0	↗

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de f		$+$	0	$+$	



‡ **Propriété 6**

- Pour tous nombres réels a et b négatifs, si $a < b$, alors $a^2 > b^2$.
- Pour tous nombres réels a et b positifs, si $a < b$, alors $a^2 < b^2$.

3 Forme canonique et variations

‡ **Propriété 7**

f est une fonction polynomiale du deuxième degré, d'expression $f(x) = ax^2 + bx + c$.
On peut écrire $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = a(x\text{-}\alpha)^2 + \beta,\text{ où } \alpha = \text{-}\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha)$$

La fonction polynomiale f est présentée ici sous **sa forme canonique**.

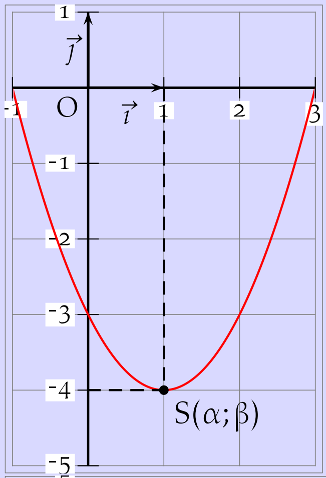
‡ **Propriété 8**

On considère une fonction polynomiale du deuxième degré d'expression canonique : $f(x) = a(x\text{-}\alpha)^2 + \beta$.

- Si $a > 0$, f admet le tableau de variations :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Variations de f		$\searrow$	β	$\nearrow$	

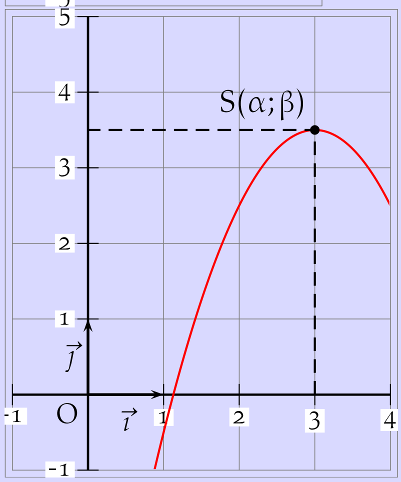
En outre, la courbe représentative de f est **une parabole** « avec les branches vers le haut ».
Elle admet pour sommet le point S($\alpha;\beta$) et la droite d'équation $x = \alpha$ comme axe de symétrie.



- $a < 0$, f admet le tableau de variations :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Variations de f		$\nearrow$	β	$\searrow$	

En outre, la courbe représentative de f est **une parabole** « avec les branches vers le bas ».
Elle admet pour sommet le point S($\alpha;\beta$) et la droite d'équation $x = \alpha$ comme axe de symétrie.



↪ **Exemple 3**

Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \text{-}3x^2 + 5x\text{-}1$.

4 Équations du deuxième degré et racines

Définition 4

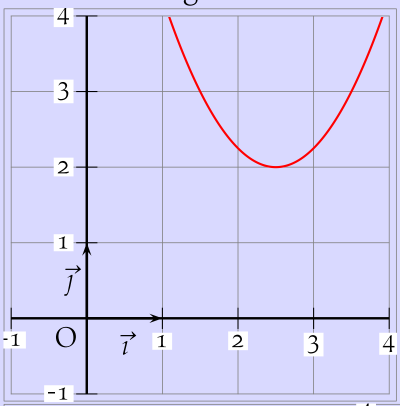
f est une fonction polynomiale du deuxième degré, d'expression $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Le discriminant de f est le nombre réel Δ défini par :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

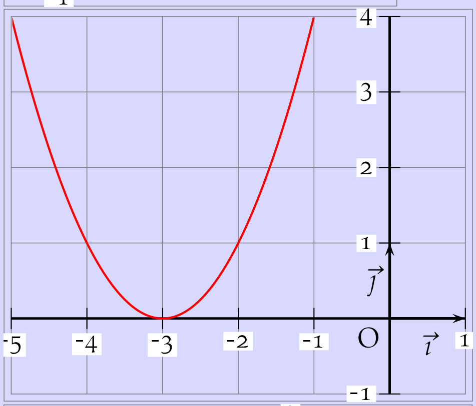
Propriété 9 : Résolution des équations du deuxième degré

On veut résoudre une équation de la forme : $ax^2 + bx + c = 0$.
Cela revient à chercher les antécédents de 0 de la fonction polynomiale du deuxième degré $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$. Trois cas peuvent se produire selon le signe de son discriminant Δ.

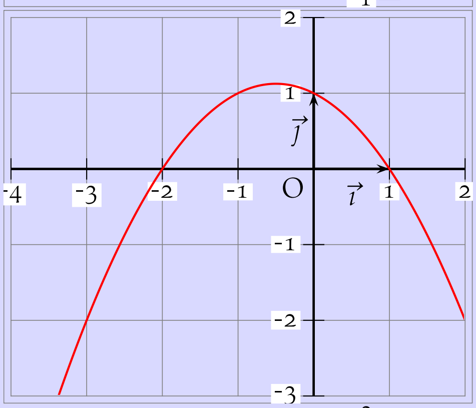
- Si $\Delta < 0$,
l'équation $ax^2+bx+c = 0$ n'a pas de solution réelle :
0 n'a pas d'antécédent par f ;
$\mathscr{C}_f$ ne coupe pas l'axe des abscisses.



- Si $\Delta = 0$,
l'équation $ax^2 + b + x + c = 0$ a une solution réelle :
$x_0 = -\frac{b}{2a}$
0 a un antécédent par f qui est x_0 ;
$\mathscr{C}_f$ est tangente à l'axe des abscisses au point d'abscisse x_0.



- Si $\Delta > 0$,
l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions réelles :
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
0 a deux antécédents par f : x_1 et x_2 ;
$\mathscr{C}_f$ coupe en deux points l'axe des abscisses.



Quand elles existent (cas où $\Delta \geqslant 0$) les solutions de l'équation $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ sont appelées **racines de la fonction polynomiale** f.

↪ Exemple 4

Calculer le discriminant de f définie par : $f(x) = 2x^2\text{-}2x\text{-}3$.
Ici on a : $a = 2$, $b = \text{-}2$ et $c = 3$, d'où :
$\Delta = (\text{-}2)^2\text{-}4 \times 2 \times 3 = 28$

Résoudre l'équation $2x^2\text{-}2x\text{-}3 = 0$.
On note $f(x) = 2x^2\text{-}2x\text{-}3$, on a vu que : $a = 2$, $b = \text{-}2$, $c = \text{-}3$ et $\Delta = 7$.
Comme $\Delta > 0$, f admet deux racines que l'on calcule :
$x_1 = \frac{\text{-}(\text{-}2)\text{-}\sqrt{28}}{2\times 2} = \frac{\text{-}1\text{-}\sqrt{7}}{2}$ et $x_2 = \frac{\text{-}(\text{-}2)+\sqrt{28}}{2\times 2} = \frac{\text{-}1+\sqrt{7}}{2}$.
$S = \{x_1 ; x_2\}$

‡ Propriété 10

On suppose que $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ est une fonction polynomiale de discriminant positif ou nul : $\Delta \geqslant 0$.
Alors on peut écrire f sous **sa forme factorisée :**

- si $\Delta = 0$,

$$f(x) = a(x\text{-}x_0)^2 \text{ où } x_0 = \text{-}\frac{b}{2a};$$

- si $\Delta > 0$,

$$f(x) = a(x\text{-}x_1)(x\text{-}x_2) \text{ où } x_1 = \frac{\text{-}b\text{-}\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{\text{-}b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

5 Inéquations du deuxième degré

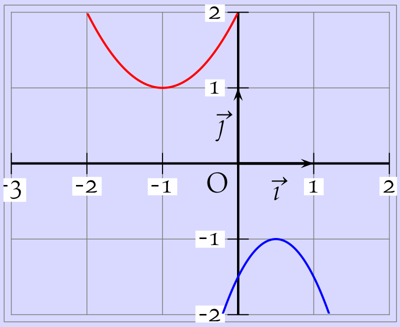
‡ Propriété 11 : Résolution des inéquations du deuxième degré

On veut résoudre une inéquation de la forme : $ax^2 + bx + c \geqslant 0$.
On introduit la fonction polynomiale du deuxième degré $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$.
On est donc amené à résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 0$: on va déterminer le signe de f.
Ici encore trois cas se présentent selon le signe du discriminant Δ :

• si $\Delta < 0$,
$ax^2 + bx + c$ est du signe de a pour tout nombre réel x ;
f admet le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Signe de $f(x)$	signe de a

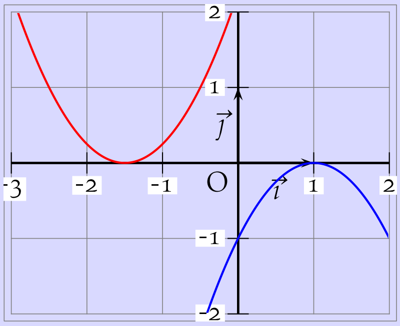
Graphiquement, $\mathscr{C}_f$ est toujours en-dessous (ou au-dessus) de l'axe des abscisses.



• si $\Delta = 0$,
$ax^2 + bx + c$ est du signe de a pour tout nombre réel x sauf en x_0 ;
f admet le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
Signe de $f(x)$	signe de a	0	signe de a

Graphiquement, $\mathscr{C}_f$ est tangente à l'axe des abscisses.



• si $\Delta > 0$,
f admet le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
Signe de $f(x)$	signe de a	0	signe opposé de a	0	signe de a

Graphiquement, $\mathscr{C}_f$ coupe en deux points l'axe des abscisses.