Fonctions de référence

1 La fonction racine carrée

Définition 1

On considère un nombre réel a positif.
La racine carrée de a est l'unique solution positive de l'équation d'inconnue x : $x^2 = a$.
On note cette solution $\sqrt{a}$, et on a donc $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Propriété 1

Pour tous nombres réels a et b positifs, on a

- $\sqrt{a} \geqslant 0$
- $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
- Si $a > 0$, on $\sqrt{\dfrac{1}{a}} = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$.

Remarque : Des deux relations on peut déduire

- si a est un nombre réel positif et b un nombre strictement positif, $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$;
- si a est un nombre réel positif et n un entier naturel, $\sqrt{a^n} = \sqrt{a}^n$.

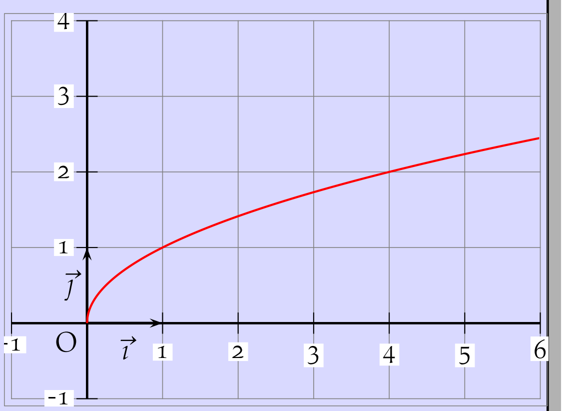
Remarque : On ne peut pas définir la racine carrée d'un nombre négatif. On prendra donc garde à ne jamais mettre de nombre négatif « sous » un radical associée à une racine carrée $\sqrt{\cdot}$. En terminale S, on donnera un sens à « $\sqrt{-1}$ », mais ce ne sera pas un nombre réel.

Définition 2

La fonction racine carrée est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+ = [0;+\infty[$ par l'expression $x \mapsto \sqrt{x}$.

Propriété 2

- La fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout nombre réel positif x, $\sqrt{x} \geqslant 0$.

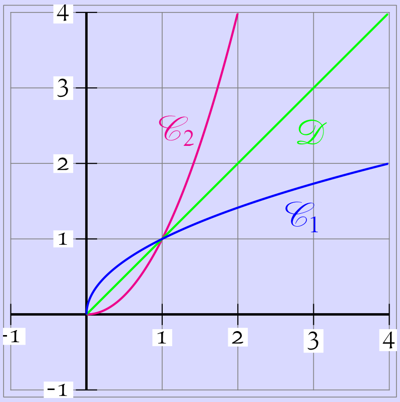


2 Comparaison de $\sqrt{x}$; x et x^2 pour $x \geqslant 0$

‡ Propriété 3

On note $\mathscr{C}_1$ la courbe représentative de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, $\mathscr{C}_2$ la courbe représentative de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathscr{D}$ la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}_+$.

- $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont symétriques par rapport à $\mathscr{D}$.
- Sur l'intervalle $]0;1[$, $\mathscr{C}_2$ est en-dessous de $\mathscr{D}$ qui en-dessous de $\mathscr{C}_1$:
  ainsi, pour tout $x \in]0;1[$, $x^2 < x < \sqrt{x}$.
- Sur l'intervalle $]1;+\infty[$, $\mathscr{C}_1$ est en-dessous de $\mathscr{D}$ qui en-dessous de $\mathscr{C}_2$:
  ainsi, pour tout $x \in]1;+\infty[$, $\sqrt{x} < x < x^2$.



3 La fonction valeur absolue

⊡ Définition 3

On considère a un nombre réel. **La valeur absolue de** a est lui-même si a est positif, et est l'opposé de a si a est négatif. On le note $|a|$.

$$|a| = \begin{cases} -a \text{ si } a \leqslant 0 \\ a \text{ si } a \geqslant 0 \end{cases}$$

‡ Propriété 4

Pour tout nombre réel a, on a :

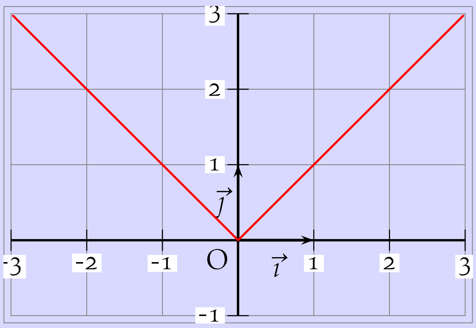
- $|a| \geqslant 0$;
- $|-a| = |a|$;
- $\sqrt{a^2} = |a|$.

⊡ Définition 4

La fonction valeur absolue est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $x \mapsto |x|$.

‡ Propriété 5

- La fonction valeur absolue est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$ et est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
- Sa courbe représentative est la réunion de deux demi-droites d'origine le point $O(0;0)$.



4 Fonctions associées

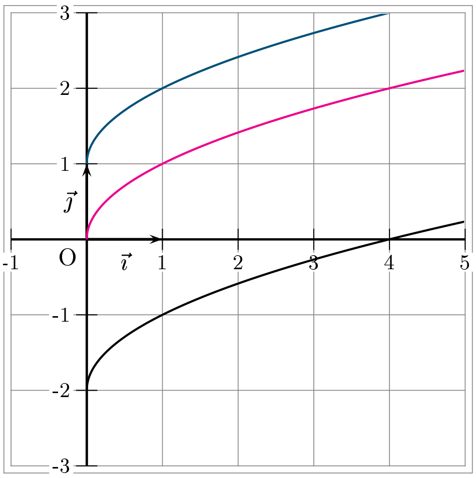
Définition 5
u et v sont deux fonctions définis sur un même intervalle I.
La fonction somme $u+v$ est la fonction définie sur I par l'expression $x \mapsto u(x)+v(x)$.
La fonction produit $u \times v$ est la fonction définie sur I par l'expression $x \mapsto u(x) \times v(x)$.

4.1 Fonctions $u+\lambda$ et $\lambda \cdot u$

Propriété 6
On considère u une fonction strictement monotone sur un intervalle I et λ un nombre réel.
Alors la fonction $u+\lambda : x \mapsto u(x)+\lambda$ a le même sens de variation que la fonction u sur I.

Exemple 1
Les fonctions $x \longmapsto \sqrt{x}+1$ et $x \longmapsto \sqrt{x}-2$ sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+$.

Exemple 2



On a représenté ci-dessus les courbes représentatives des fonctions
$x \longmapsto \sqrt{x}$, $x \longmapsto \sqrt{x}-2$ et $x \longmapsto \sqrt{x}+1$

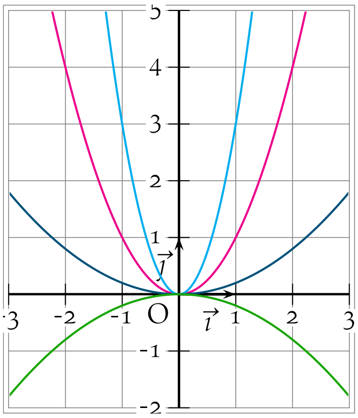
Remarque : On remarque que la courbe représentative de la fonction $u+\lambda$ est la translatée de celle de la fonction u (plus précisément on passe de la courbe de u à celle de $u+\lambda$ par une translation de vecteur $\lambda \cdot \overrightarrow{j}$.

Propriété 7
On considère u une fonction strictement monotone sur un intervalle I et λ un nombre réel.
Alors la fonction $\lambda \cdot u : x \mapsto \lambda \times u(x)$ a :

- le même sens de variation que la fonction u sur I si $\lambda > 0$;
- le sens de variation contraire de celui de la fonction u sur I si $\lambda < 0$.

Exemple 3
La fonction $x \mapsto \dfrac{-3}{x} = -3 \times \dfrac{1}{x}$ est strictement croissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

↪ **Exemple** 4



On a représenté ci-contre les courbes représentatives des fonctions $x \longmapsto x^2$, $x \longmapsto 3x^2$, $x \longmapsto \dfrac{x^2}{5}$ et $x \longmapsto -\dfrac{x^2}{5}$.

Remarque : Entre les courbes représentatives des fonctions u et $\lambda \cdot u$, on peut dire que si $|\lambda| > 1$, la courbe de $\lambda \cdot u$ est « étirée » par rapport à celle de u, et *a contrario* « distendue » si $0 \leqslant |\lambda| \leqslant 1$. Quant au signe de λ, il induit une symétrie par rapport à l'axe des abscisses si et seulement si $\lambda < 0$ entre les courbes de u et $\lambda \cdot u$.

4.2 Fonctions $\sqrt{u}$ et $\dfrac{1}{u}$

⊡ **Définition 6**

On considère u une fonction définie sur un intervalle I.
On suppose que u est positive sur I : pour tout nombre réel x de I, $u(x) \geqslant 0$.
On définit alors la fonction $\sqrt{u}$ est la fonction définie sur I par l'expression $x \mapsto \sqrt{u(x)}$.

‡ **Propriété 8**

On considère u une fonction définie sur un intervalle I, que l'on suppose positive sur I.
Alors la fonction $\sqrt{u}$ a le même sens de variation que la fonction u sur I.

↪ **Exemple** 5

La fonction $x \mapsto x^2 - 1$ est positive et croissante sur $]-\infty;-1]$ et sur $[1;+\infty[$, ainsi la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2-1}$ est définie et croissante sur sur $]-\infty;-1]$ et sur $[1;+\infty[$.
On ne pourrait pas la définir sur $]-1;1[$ où $x^2 - 1 < 0$.

⊡ **Définition 7**

On considère u une fonction définie sur un intervalle I.
On suppose que u qui ne s'annule pas sur I : pour tout nombre réel x de I, $u(x) \neq 0$.
On définit alors la fonction $\dfrac{1}{u}$ est la fonction définie sur I par l'expression $x \mapsto \dfrac{1}{u(x)}$.

‡ **Propriété 9**

On considère u une fonction définie sur un intervalle I, ne s'annulant pas sur I.
Alors la fonction $\dfrac{1}{u}$ a le sens de variation contraire de celui de la fonction u sur I.

↪ **Exemple** 6

Sur l'intervalle $]3;+\infty[$, la fonction $x \mapsto x - 3$ ne s'annule pas et est strictement croissante.
On peut alors définir la fonction $x \mapsto \frac{1}{x-3}$ et elle est strictement décroissante sur $]3;+\infty[$.