Vecteurs et droites du plan

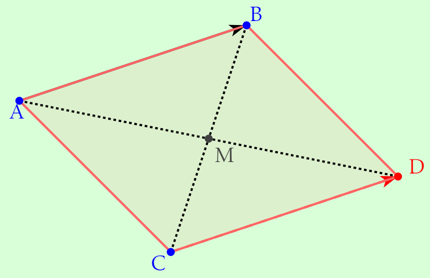
1 Vecteurs

1.1 Translation et vecteur

Définition 1

Dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan, on considère deux points A et B.

La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la transformation du plan qui à tout point C du plan lui associe un unique point D tel que ABDC soit un parallélogramme.



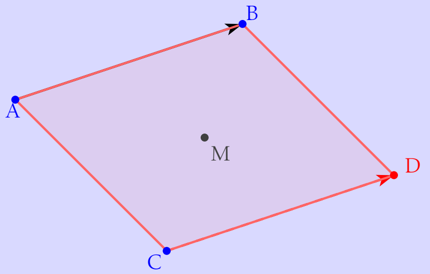
Remarque : Dire que le point D l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est équivalent à dire que les segments [AD] et [BC] se coupent en leur milieu, les diagonales d'un parallélogramme se coupant en leurs milieux.

Définition 2

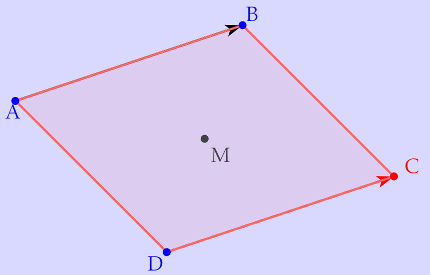
A, B, C et D sont quatre points du plan.
On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux
si et seulement si ils définissent la même translation
si et seulement si ABDC est un parallélogramme.
On note alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

‡ Propriété 1

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si ABDC est un parallélogramme.



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si et seulement si ABCD est un parallélogramme.



⊡Définition 3

On considère A et B deux points du plan. À partir de n'importe quel point du plan, on peut tracer un vecteur qui lui est égal. On pourra alors le noter $\overrightarrow{u}$.

On dira alors que $\overrightarrow{AB}$ est **un représentant du vecteur** $\overrightarrow{u}$.

Pour le vecteur $\overrightarrow{AB}$, le point A sera **son origine** et le point B **son extrémité**.

‡ Propriété 2

À tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ du plan, on peut faire correspondre :

- une direction : celle de la droite (AB)
- un sens : celui de A vers B
- une longueur : la longueur AB

Ces trois données sont caractéristiques du vecteur.

Cependant, un vecteur $\overrightarrow{u}$ ne possède pas de point d'application : on peut le représenter en plusieurs endroits du plan.

⊡Définition 4

On définit **le vecteur nul** comme le vecteur associé à la translation qui ne « bouge » aucun point du plan.

On le note $\overrightarrow{0}$.

1.2 Coordonnées d'un vecteur

Définition 5

On se place dans un repère (O; I; J) du plan. On considère $\overrightarrow{u}$ un vecteur.
On peut créer un représentant du vecteur $\overrightarrow{u}$ d'origine le point O(0; 0) et on note M(x; y) le point qui correspond à son extrémité.
On a ainsi $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$.
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ sont les mêmes que celles du point M, et on les note généralement :
$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Propriété 3

On considère A(x_A; y_A) et B(x_B; y_B) deux points du plan. Alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont :
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Propriété 4

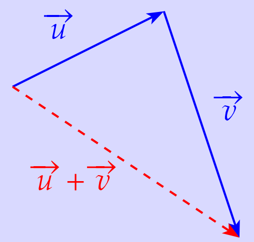
Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont mêmes coordonnées dans un repère du plan.

1.3 Somme de vecteurs

Propriété 5

On considère $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.

Si on enchaîne la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ puis la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$, on obtient une nouvelle translation de vecteur que l'on appelle **somme des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$**. On le note $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

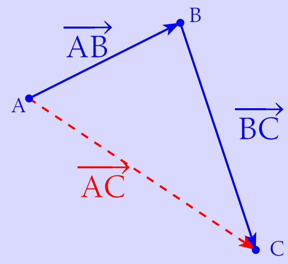


‡ **Propriété 6 Relation de Chasles**

Pour tous points A, B et C :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

On appelle cette propriété **la relation de Chasles.**



‡ **Propriété 7**

On considère $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan.

Alors $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$.

1.4 Opposé d'un vecteur

⊡ **Définition 6**

$\overrightarrow{u}$ est un vecteur du plan.

Le **vecteur opposé au vecteur** $\overrightarrow{u}$ est le vecteur $\overrightarrow{v}$ tel que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

On le note -$\overrightarrow{u}$ et on a donc : $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$.

‡ **Propriété 8**

Le vecteur opposé -$\overrightarrow{u}$ est un vecteur de même direction et même longueur que le vecteur originel $\overrightarrow{u}$ mais de sens contraire.

Ainsi, $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

1.5 Multiplication par un scalaire

⊡ **Définition 7**

On considère $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur et k un nombre réel.

On définit le vecteur $k \cdot \overrightarrow{u}$ par les coordonnées : $k \cdot \overrightarrow{u}\begin{pmatrix} k \times x \\ k \times y \end{pmatrix}$.

‡ **Propriété 9**

On considère $\overrightarrow{u}$ un vecteur et k un nombre réel.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $k \cdot \overrightarrow{u}$ ont la même direction.

‡ **Propriété 10**

On considère $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan et k et k' deux nombres réels.
$(k+k')\cdot\overrightarrow{u} = k\cdot\overrightarrow{u} + k'\cdot\overrightarrow{u}$
$k\cdot(k'\cdot\overrightarrow{u}) = (k\times k')\cdot\overrightarrow{u}$
$k\cdot(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = k\cdot\overrightarrow{u} + k\cdot\overrightarrow{v}$

1.6 Vecteurs colinéaires

⊡**Définition 8**

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **colinéaires**
si et seulement s'il existe un nombre réel k tel que
$\overrightarrow{u} = k\cdot\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{v} = k\cdot\overrightarrow{u}$.

‡ **Propriété 11**

Deux vecteurs colinéaires ont la même direction.

‡ **Propriété 12**

On considère $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs.
Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires
si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles :
ce tableau est alors

x	y
x'	y'

un tableau de proportionnalité.
si et seulement si xy'-$x'y = 0$
si et seulement si $xy' = x'y$

‡ **Propriété 13**

A, B, C et D sont quatre points du plan.

- Le point C appartient à la droite (AB) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
- Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

2 Droites du plan

Définition 9

On considère A et B deux points du plan.
La droite (AB) est l'ensemble des points M tels que les points A, B et M sont alignés.
On note (AB) cette droite.

Propriété 14

On considère un point A et un vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul.
La droite $(\mathrm{A};\overrightarrow{u})$ est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires.
On dit alors que $\overrightarrow{u}$ est **un vecteur directeur de la droite** $(\mathrm{A};\overrightarrow{u})$.

Remarque : Tout vecteur non nul, colinéaire à $\overrightarrow{u}$ est aussi un vecteur directeur de la droite $(\mathrm{A};\overrightarrow{u})$.

Propriété 15

Toute droite $\mathscr{D}$ du plan admet une équation de la forme

$$ax + by + c = 0$$

avec la condition $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.
On dit que $ax + by + c = 0$ est **une équation cartésienne** de la droite $\mathscr{D}$.
En outre, le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.

Propriété 16

On considère un point $\mathrm{M}(x_{\mathrm{M}};y_{\mathrm{M}})$ et une droite $\mathscr{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$.
Le point M appartient à la droite $\mathscr{D}$ si et seulement si
$ax_{\mathrm{M}} + by_{\mathrm{M}} + c = 0$.

Propriété 17

On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$ avec $b \neq 0$.
$\mathscr{D}$ admet alors une équation de la forme $y = mx + p$ avec $m = -\frac{a}{b}$, appelée **équation réduite**.
En outre, $\mathscr{D}$ admet pour coefficient directeur le nombre m.

Propriété 18

Deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.