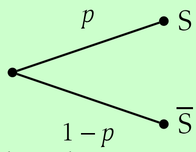
Loi binomiale

1 Épreuve et loi de Bernoulli

Définition 1

Une épreuve de Bernoulli de paramètre $p \in [0;1]$ est une expérience aléatoire présentant deux issues, dont l'une est « **le succès** », de probabilité p et l'autre « **l'échec** », de probabilité $1-p$.

On donne ci-contre une représentation d'une telle épreuve :



La variable aléatoire associée à cette expérience et qui prend la valeur 0 en cas d'échec et 1 en cas de succès est appelée **variable aléatoire de Bernoulli**.
La loi de probabilité de cette variable aléatoire est appelée **loi de Bernoulli**.
On note alors $X \sim \mathcal{B}(p)$ (« X suit la loi de Bernoulli de paramètre p »).

x_i	0	1
$\mathbf{P}(X = x_i)$	$1-p$	p

Remarques :
- Une épreuve de Bernoulli sert à modéliser une expérience aléatoire dont on ne considère que deux issues.
  Ainsi, un lancer d'un dé à 20 faces, où on s'intéresse à la réalisation de l'événement S : « on obtient 13 » est une épreuve de Bernoulli, dont le paramètre est $p = \frac{1}{20}$ si ce dé est équilibré.
  Sonder une personne d'une population humaine en lui demandant si elle va voter oui ou non à un référendum est aussi une épreuve de Bernoulli : on convient qu'on a un succès si cette personne sondée répond « oui » et un échec si la personne sondée répond « non ».
- La notation $X \sim \mathcal{B}(p)$ n'est pas officielle, certains préfèrent $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$, *etc.* .
- De nombreux manuels et formulaires notent $q = 1-p$.

‡ Propriété 1

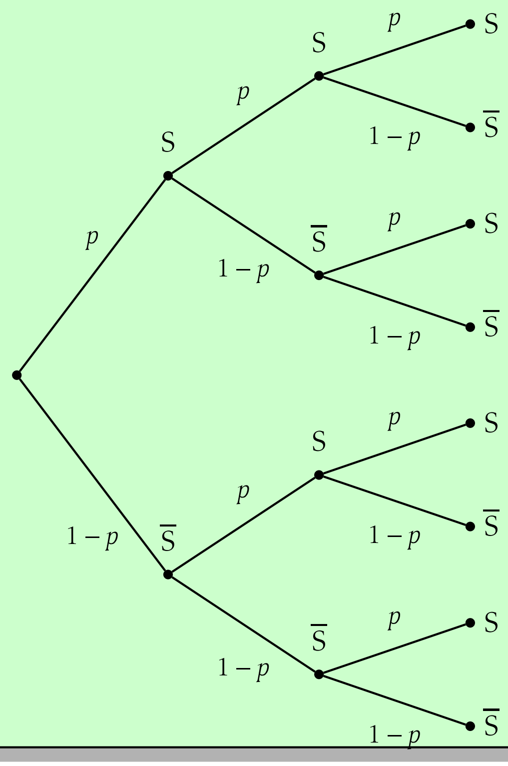
Pour une variable aléatoire $X \sim \mathcal{B}(p)$, X possède une espérance et une variance et
- $\mathbf{E}(X) = p$.
- $\mathbf{V}(X) = p(1-p)$.

2 Schéma de Bernoulli et loi binomiale

Définition 2

On considère une épreuve de Bernoulli de paramètre $p \in [0;1]$. En répétant cette expérience aléatoire, de manière indépendante, $n \in \mathbb{N}^{\times}$ fois, on obtient un **schéma de Bernoulli**.

On a donné ci-contre une représentation, sous forme d'un arbre de répétition, de ce schéma pour $n = 3$ où S est l'événement « obtenir un succès à l'épreuve de Bernoulli ».



La loi de probabilité d'une variable aléatoire X qui compte après la réalisation de n épreuves le nombre de succès se nomme **la loi binomiale de paramètres n et p**.

On note alors $X \sim \mathcal{B}(n;p)$ (« X suit la loi binomiale de paramètres n et p »).

La loi binomiale de paramètres 1 et p est la loi de Bernoulli de paramètre p.

Remarque :

Une loi binomiale correspond à une épreuve de Bernoulli réalisée plusieurs fois, sous les mêmes conditions.

Lancer 4 fois un dé équilibré à 20 faces et s'intéresser à l'événement S : « obtenir 13 » correspond à loi binomiale de paramètres 4 et $\frac{1}{20}$.

Pour le sondage pour un référendum, il existe un petit écueil. En effet, *a priori*, comme un sondeur ne ré-interroge pas plusieurs un même individu, on ne peut pas parler d'indépendance (il faudrait tout le temps choisir dans la même situation d'avant la première question, sans exclusion, car sinon, les probabilités changent : penser à la situation extrême d'une population de 10 individus, 5 pour, 5 contre ; si on interroge en excluant, et si par exemple on interroge les 5 pour, alors la probabilité d'interroger un pour dans ceux qui restent est de 0). Ces situations, dites « sans remise », sont modélisées par une loi plus complexe, la loi hypergéométrique.

Néanmoins, dans le cas d'un sondage, dès qu'on a une « grande » population, et que l'on ne l'interroge pas plus de 10% de celle-ci, on supposera que les tirages sont indépendants et donc qu'on est dans le cadre de la loi binomiale (et pour les arrondis faits pour un sondage, l'erreur est négligeable devant la probabilité).

3 Coefficient binomiaux

3.1 Définition

Exemple : On lance trois fois de suite le même dé équilibré à 12 faces, et on s'intéresse à la sortie du 7.

On note X la variable aléatoire comptant le nombre de « 7 » après les trois lancers.

Lancer le dé et observer l'apparition du « 7 » est une épreuve de Bernoulli, de paramètre $\frac{1}{12}$ car le dé est équilibré. Cette épreuve est répétée de manière indépendante 3 fois. La variable aléatoire X suit ainsi la loi binomiale de paramètres 3 et $\frac{1}{12}$.

On veut calculer $\mathbf{P}(\mathrm{X}=1)$.

En représentant le schéma de Bernoulli associée à cette expérience aléatoire, trois chemins amènent à un succès (et donc deux échecs) : $\mathrm{S}\overline{\mathrm{SS}}$; $\overline{\mathrm{S}}\mathrm{S}\overline{\mathrm{S}}$ et $\overline{\mathrm{SS}}\mathrm{S}$.

En outre, $\begin{cases} \mathbf{P}(\text{« }\mathrm{S}\overline{\mathrm{SS}}\text{ »}) = p\times(1-p)\times(1-p) = p(1-p)^2 = \frac{1}{12}\times\left(\frac{11}{12}\right)^2 = \frac{121}{1\,728} \\ \mathbf{P}(\text{« }\overline{\mathrm{S}}\mathrm{S}\overline{\mathrm{S}}\text{ »}) = (1-p)\times p\times(1-p) = p(1-p)^2 = \frac{1}{12}\times\left(\frac{11}{12}\right)^2 = \frac{121}{1\,728} \\ \mathbf{P}(\text{« }\overline{\mathrm{SS}}\mathrm{S}\text{ »}) = (1-p)\times(1-p)\times p = p(1-p)^2 = \frac{1}{12}\times\left(\frac{11}{12}\right)^2 = \frac{121}{1\,728} \end{cases}$.

Les probabilités de chacun de réalisation des chemins amenant un succès sont toutes égales, donc $\mathbf{P}(\mathrm{X}=1)$ est égale au nombre de chemins multiplié par cette probabilité commune, d'où

$\mathbf{P}(\mathrm{X}=1) = 3\times\frac{121}{1\,728} = \frac{121}{576}$.

Pour cette valeur faible de n, on a pu déterminer le nombre de chemins en réalisant l'arbre mais dès que $n \geqslant 5$, cela devient trop peu pratique. On va chercher un moyen de déterminer le nombre de chemins sans avoir à tracer l'arbre.

Définition 3

Pour un schéma de Bernoulli de paramètres $p\in[0;1]$ et $n\in\mathbb{N}^{\times}$, et pour $k\in[\![0;n]\!]$,

le nombre de chemins réalisant k succès, et donc $n-k$ échecs, est **le coefficient binomial**, noté $\binom{n}{k}$.

‡ Propriété 2

Pour $n\in\mathbb{N}^{\times}$ et $k\in[\![0;n]\!]$, on a

- $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$.
- $\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$.
- $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ (Symétrie des coefficients binomiaux).
- $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$ (Relation de Pascal).

Remarque : À l'aide de la calculatrice, $\binom{n}{k} = n$ `Combinaison` k, « `Combinaison` » étant dans « `math` » puis « `PROB` ».

3.2 Calculs à l'aide des coefficients binomiaux

‡ **Propriété 3**

Pour un schéma de BERNOULLI de paramètres $p \in [0;1]$ et $n \in \mathbb{N}^{\times}$, et pour $k \in [\![0;n]\!]$, la probabilité d'une liste comportant k succès, et donc $n-k$ échecs, ne dépend pas de l'ordre de la liste.

‡ **Propriété 4**

Pour $X \sim \mathcal{B}(n;p)$, avec $n \in \mathbb{N}^{\times}$, $p \in [0;1]$ et $k \in [\![0;n]\!]$, on a

$$\mathbf{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\mathbf{P}(X=k) = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{nombre de chemins amenant } k \text{ succès}} \times \underbrace{p^k}_{\text{probabilité d'un succès}^{\text{nombre de succès}}} \times \underbrace{(1-p)^{n-k}}_{\text{probabilité d'un échec}^{\text{nombre d'échecs}}}$$

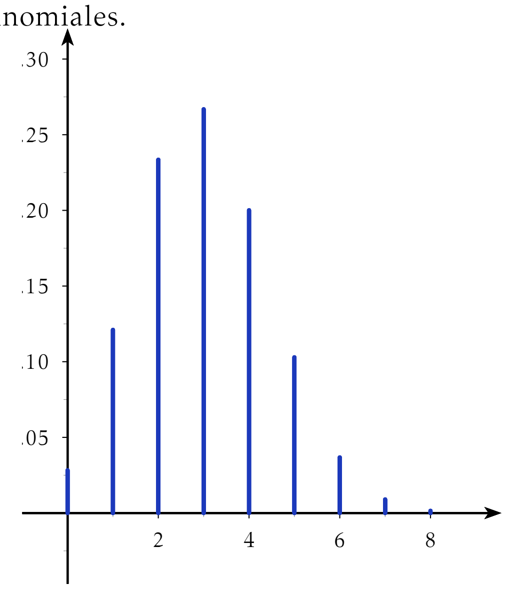
‡ **Propriété 5**

Pour une variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^{\times}$ et $p \in [0;1]$, X admet une espérance et une variance et

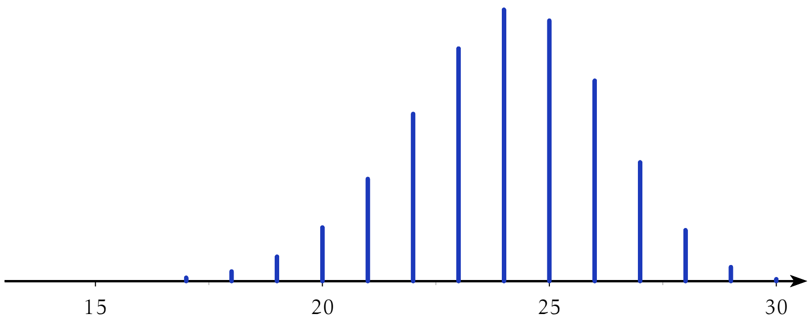
- $\mathbf{E}(X) = np$.
- $\mathbf{V}(X) = np(1-p)$.

4 Représentations graphiques d'une loi binomiale

On donne ci-dessous des diagrammes en bâtons, avec les mêmes échelles, correspondant à des lois binomiales.



$n = 10$ et $p = 0,3$



$n = 30$ et $p = 0,8$ (les valeurs $\mathbf{P}(X=0)$ à $\mathbf{P}(X=13)$ sont tellement faibles qu'elles sont représentées par une longueur non détectable et il a été fait le choix de tronquer la représentation)

Remarques :

- Pour les valeurs de k proches de $\mathbf{E}(X) = np$, les probabilités cumulées $\mathbf{P}(X=k)$ sont plus élevées et correspondent aux « plus hauts bâtons ».
- Plus n devient grand, plus l'allure du diagramme fait apparaître une « cloche » (appelée courbe de Gauß).