Produit scalaire

1 Norme d'un vecteur

⊡**Définition 1**

$\vec{u}$ est un vecteur et A et B deux points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
La norme du vecteur $\vec{u}$ est le nombre noté $\|\vec{u}\|$ défini par :
$\|\vec{u}\| = AB$.

‡ **Propriété 1**

On considère $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et λ un nombre réel. Alors :

- $\|\vec{u}\| \geqslant 0$;
- Si on note $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2+b^2}$;
- $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda| \times \|\vec{u}\|$.

⊡**Définition 2**

On considère $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ défini par :
$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right]$

‡ **Propriété 2**

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires du plan.
• Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont le même sens, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
• Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont des sens opposés, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

‡ **Propriété 3**

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs du plan et λ un nombre réel. Alors :
• $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$ (symétrie du produit scalaire).
• $\vec{u}\cdot\left(\lambda\vec{v}\right) = \lambda \times \left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$.
• $\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$ (distributivité).

⊡**Définition 3**

On considère un vecteur $\vec{u}$.
Le nombre $\vec{u}\cdot\vec{u}$ est appelé **carré scalaire du vecteur** $\vec{u}$.
On le note $\vec{u}^{\,2} = \vec{u}\cdot\vec{u}$

‡ **Propriété 4**

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan. Alors :
• $\vec{u}^{\,2} = \|\vec{u}\|^2$
• $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 = \vec{u}^{\,2} + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^{\,2}$
• $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}-\vec{v}\right) = \vec{u}^{\,2} - \vec{v}^{\,2}$

2 Produit scalaire & orthogonalité

2.1 Définition analytique

⊡Définition 4

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

On considère $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan.

$\vec{u}\cdot\vec{v} = aa' + bb'$

2.2 Orthogonalité de deux vecteurs

⊡Définition 5

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **orthogonaux** si et seulement si les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

On note alors $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$

‡ Propriété 5

Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul :

$\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

2.3 Équations de droites

⊡Définition 6

Un vecteur normal à une droite est un vecteur non nul orthogonal à un vecteur de la droite.

‡ Propriété 6

$\mathscr{D}$ est la droite d'équation : $ax + by + c = 0$.

Un vecteur normal de $\mathscr{D}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

‡ Propriété 7

Toute droite admettant $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ comme vecteur normal admet une équation $ax + by + c = 0$.

2.4 Équations de cercle

‡ Propriété 8

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

$\mathscr{C}$ est le cercle de centre $\Omega(x_\Omega;y_\Omega)$ et de rayon $r \geqslant 0$.

Une équation du cercle $\mathscr{C}$ est $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = r^2$.

Ainsi, un point $M(x_M;y_M)$ appartient à $\mathscr{C}$ si et seulement si $(x_M - x_\Omega)^2 + (y_M - y_\Omega)^2 = r^2$.

‡ Propriété 9

On considère $\mathscr{C}$, un cercle de diamètre [AB].

Le point M appartient à $\mathscr{C}$ si et seulement si $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$.

3 Projection orthogonale

Définition 7

On considère A, B et M trois points du plan, distincts deux à deux et non alignés.

Le projeté orthogonal du point M **sur la droite** (AB) est le point H tel que $\begin{cases} (HM)\perp(AB) \\ H \in (AB) \end{cases}$.

Propriété 10

A, B et C sont trois points distincts du plan. On note H le projeté orthogonal de C sur (AB).

- Si H appartient à la demi-droite [AB), alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = AB \times AH$.
- Si H n'appartient pas à la demi-droite [AB), alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = -AB \times AH$.

4 Lien avec le cosinus

Propriété 11

On considère $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls, alors

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v})$$

Propriété 12

a et b sont deux nombres réels, alors
$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

Théorème 1 : Formules d'Al-Kashi

Pour un triangle ABC, on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A})$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\widehat{B})$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\widehat{C})$$

Remarque : Ce théorème est une généralisation du théorème de Pythagore à des triangles non nécessairement rectangles.

Théorème 2 : Loi des sinus

Pour un triangle ABC, on a

$$\frac{BC}{\sin\left(\widehat{A}\right)} = \frac{AC}{\sin\left(\widehat{B}\right)} = \frac{AB}{\sin\left(\widehat{C}\right)}$$