Suites arithmétiques et géométriques

Exemple :

Archibald et Bobby se préparent pour le semi-marathon (distance à parcourir : 21,1 km).

Ils s'entrainent hebdomadairement et de manière progressive ; chacun commence à s'entrainer 3000 m la première semaine et par la suite :

- Archibald augmente sa distance de course de 450 m par semaine ;
- Bobby augmente sa distance de course de 10 % par semaine.

On note a_n la distance parcourue par Archibald au bout de n et b_n celle par Bobby.

Grâce à l'énoncé, on sait que $a_0 = 3000$ et $b_0 = 3000$.

Entre deux entrainements consécutifs, Archibald court 450 m de plus : ainsi il court 450 m en plus au $n+1$-ème entrainement qu'au n-ème entrainement.

On en déduit la relation : $a_{n+1} = a_n + 450$.

La suite a est définie par $\begin{cases} \text{son premier terme } a_0 = 3000 \\ \text{la relation de récurrence } a_{n+1} = a_n + 450 \end{cases}$.

Entre deux entrainements consécutifs, Bobby court 10 % en plus : ainsi il court 10 % en plus au $n+1$-ème entrainement par rapport n-ème entrainement.

On en déduit la relation : $b_{n+1} = b_n \times 1,1$.

La suite b est définie par $\begin{cases} \text{son premier terme } b_0 = 3000 \\ \text{la relation de récurrence } b_{n+1} = 1,1 b_n \end{cases}$.

1 Suites arithmétiques

1.1 Définition

Définition 1
Une suite u est **arithmétique** de raison r si pour tout n, on a la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Exemple :

La suite correspondant à l'entrainement d'Archibald est arithmétique : $\begin{cases} a_0 = 3000 \\ a_{n+1} = a_n + 450 \end{cases}$

Dans cette situation, la raison est $r = 450$ car pour tout entier naturel n : $a_{n+1} - a_n = 450$.

‡ **Propriété 1**
Si u est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors pour tout n :

$$u_n = u_0 + nr$$

‡ **Propriété 2**
On peut caractériser une suite arithmétique par la donnée de son premier terme et de sa raison.

1.2 Variation

‡ **Propriété 3**
On considère une suite arithmétique de raison r.
Si $r > 0$, la suite u est croissante.
Si $r < 0$, la suite u est décroissante.
Les suites arithmétiques correspondent à des évolutions **linéaires**.

1.3 Sommes partielles

‡ **Propriété 4**
Soit u une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \ldots + u_n = \frac{(u_0 + u_n) \times (n+1)}{2} = \frac{(\text{premier terme} + \text{dernier terme}) \times (\text{nombre de termes})}{2}$$

Remarques :
Entre 0 et n il y a $n+1$ entiers.
Entre p et n il y a $n-p+1$ entiers.

2 Suites géométriques

2.1 Prélude

‡ **Propriété 5**

a et b sont deux nombres réels et n et p deux entiers naturels.

- $a^0 = 1$;
- $a^n \times a^p = a^{n+p}$;
- $(a^n)^p = a^{np}$;
- $(ab)^n = a^n \times b^n$;
- Pour $a \neq 0$, $\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$.

2.2 Définition

⊡**Définition 2**

Une suite u est **géométrique** de raison q si pour tout n, on a la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Exemple :

La suite correspondant à l'entrainement de Bobby est géométrique : $\begin{cases} b_0 = 3000 \\ b_{n+1} = 1,1 \times b_n \end{cases}$

Dans cette situation, la raison est $q = 1,1$:
$b_{n+1} = 1,1 b_n$.

‡ **Propriété 6**

Si u est la suite géométrique de raison $q \neq 0$ et de premier terme u_0, alors pour tout n :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

‡ **Propriété 7**

On peut caractériser une suite géométrique par la donnée de son premier terme et de sa raison.

2.3 Variation

‡ **Propriété 8**

Soit u une suite géométrique de premier u_0 et de raison q.
Le sens de variation de la suite u dépend du signe de u_0 et de la raison q :

	$q < 0$	$0 < q < 1$	$q > 1$
$u_0 < 0$	u non monotone	u croissante	u décroissante
$u_0 > 0$	u non monotone	u décroissante	u croissante

Les suites géométriques de raison strictement positives correspondent à des évolutions **exponentielles**.

2.4 Sommes partielles

‡ **Propriété 9**
La somme des $n+1$ puissances successives d'un nombre réel $q \neq 1$ s'exprime sous la forme :

$$\underbrace{1+q+\cdots+q^n}_{n+1 \textbf{ termes}} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Exemple :
Calculer $1+3+\cdots+3^{29}$.
$1+3+\cdots+3^{29} = \frac{1-3^{30}}{1-3} = 102\,945\,566\,047\,324$

‡ **Propriété 10**
Soit u une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q \neq 1$. Alors :

$$u_0+u_1+\cdots+u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \text{premier terme} \times \frac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}}$$

Exemple :
Calculer la somme des 25 premiers termes de la suite définie par $u_n = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
On reconnait une suite géométrique de premier terme $u_0 = 7$ et de raison $\frac{1}{2}$.
On applique la formule :
$u_0+\cdots+u_{24} = 7 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{25}}{1-\frac{1}{2}} = 1,999\,999\,881.$