# Suites, génération

## 1 Concept de suites

### 1.1 Définition générale

**Rappel :** On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, *i.e.* des entiers positifs : $0; 1; 2; \ldots$

**Définition 1**
**Une suite** $u$ est une fonction dont l'ensemble de définition est $\mathbb{N}$.
Si $n$ est un entier naturel, **le terme d'indice** $n$ ou **de rang** $n$ est noté $u_n$ et est l'image de $n$ par $u$.

Exemple :
Jean-Kévin achète des actions le 1er mars au prix de 1 000€. Il note ensuite mensuellement le cours de l'action qu'il note dans ce tableau :

| Nombre de mois après l'achat | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valeur de l'action (€) | 1000 | 995 | 992 | 991 | 992 | 995 | 1000 | 1007 |

On se place $n$ mois après l'achat des actions. $n$ ne peut prendre que des valeurs entières : 0 ; 1 ; ...
On note $v(n)$ ou plutôt $v_n$ la valeur de l'action $n$ mois après son achat par Jean-Kévin.
Si par exemple $n = 0$, on est à 0 mois de l'achat, c'est donc la valeur initiale de l'action, c'est à dire 1 000 €. On a donc : $v_0 = 1000$ €.
Si $n = 1$, on est 1 mois après l'achat, et donc par lecture du tableau on a : $v_1 = 995$ €.
La valeur de l'action après $n = 5$ mois est : $v_5 = 995$ €.

### 1.2 Suites définies par une relation explicite

**Définition 2**
Soit $f$ une fonction définie sur $[0; +\infty[$.
On peut alors définir une suite $u$ via :

$$u_n = f(n)$$

On dit alors que la suite $u$ est définie **de manière explicite**.

**Exemples :**

- On considère la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = -x^2 + x + 4$.
  On définit alors la suite $u$ par : $u_n = f(n)$, c'est à dire :
  $$u_n = -n^2 + n + 4$$
  Si on veut déterminer $u_1$, il suffit de remplacer $n$ par 1 :
  $u_1 = -1^2 + 1 + 4 = 4$ et de même pour trouver $u_3$ :
  $u_3 = -3^2 + 3 + 4 = -2$
- Une entreprise produit des chaussures. On note $u_n$ le coût de production de $n$ paires de chaussures.
  L'entreprise nous indique que $u_n = 15n + 3000$.
  Pour produire 10 chaussures cela coûte donc à l'entreprise :
  $u_{10} = 15 \times 10 + 3000 = 3150$ €.
  On s'intéresse au coût de production moyen par chaussure, on le note $v_n$. On a :
  $v_n = \frac{u_n}{n} = 15 + \frac{3000}{n}$
  Et le coût moyen par chaussure pour 10 chaussures produites est : $v_{10} = 15 + \frac{3000}{10} = 315$ €

### 1.3 Suites définies par une relation de récurrence

**Définition 3**
On peut définir une suite par la donnée de :
- un premier terme ;
- une relation entre un terme et les précédents.

On dit que la suite est définie par **une relation de récurrence**.

**Exemple :**

Archibald et Bobby se préparent pour le semi-marathon (distance à parcourir : 21,1 km).

Ils s'entrainent hebdomadairement et de manière progressive ; chacun commence à s'entrainer 3000 m la première semaine et par la suite :

- Archibald augmente sa distance de course de 450 m par semaine
- Bobby augmente sa distance de course de 10 % par semaine

On note $a_n$ la distance parcourue par Archibald au bout de $n$ et $b_n$ celle par Bobby.

Grâce à l'énoncé, on sait que $a_0 = 3000$ et $b_0 = 3000$.

Entre deux entrainements consécutifs, Archibald court 450 m de plus : ainsi il court 450 m en plus au $n+1$-ème entrainement qu'au $n$-ème entrainement.

On en déduit la relation : $a_{n+1} = a_n + 450$.

La suite $a$ est définie par $\begin{cases} \text{son premier terme } a_0 = 3000 \\ \text{la relation de récurrence } a_{n+1} = a_n + 450 \end{cases}$.

Entre deux entrainements consécutifs, Bobby court 10 % en plus : ainsi il court 10 % en plus au $n+1$-ème entrainement par rapport $n$-ème entrainement.

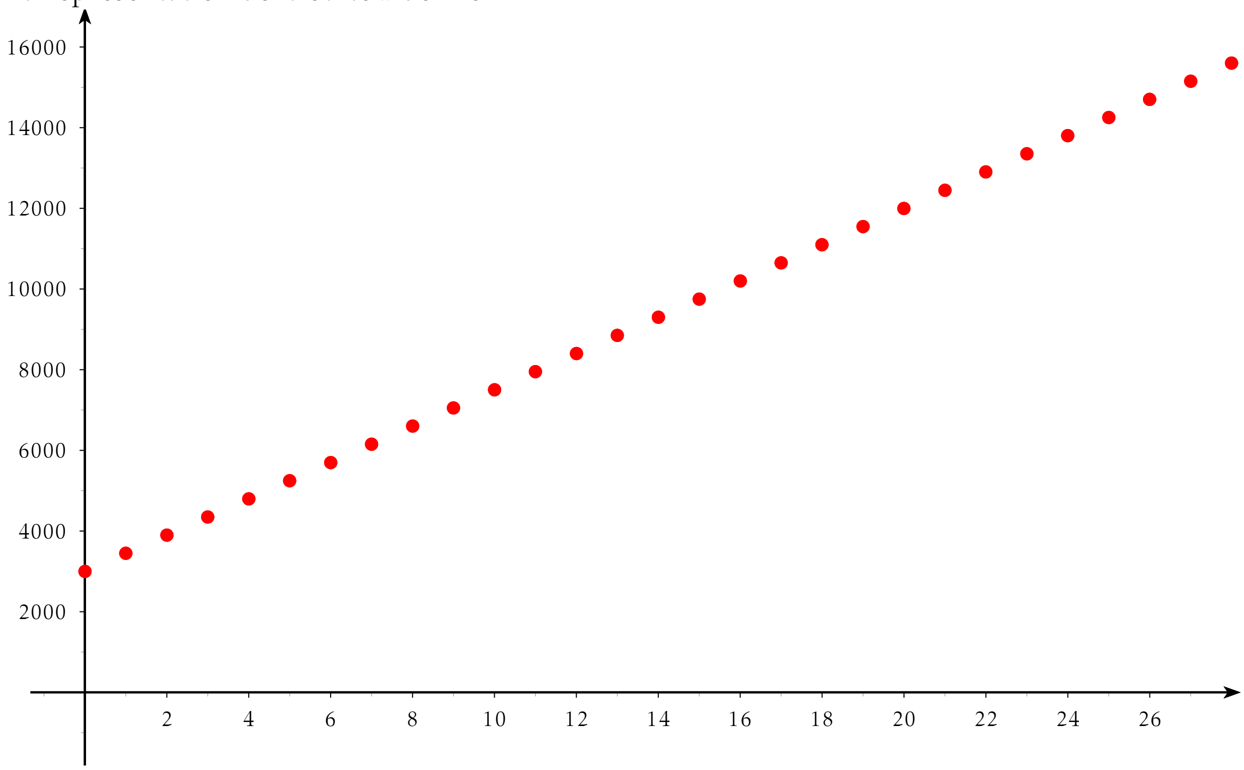
On en déduit la relation : $b_{n+1} = b_n \times 1,1$.

La suite $b$ est définie par $\begin{cases} \text{son premier terme } b_0 = 3000 \\ \text{la relation de récurrence } b_{n+1} = 1,1 b_n \end{cases}$.

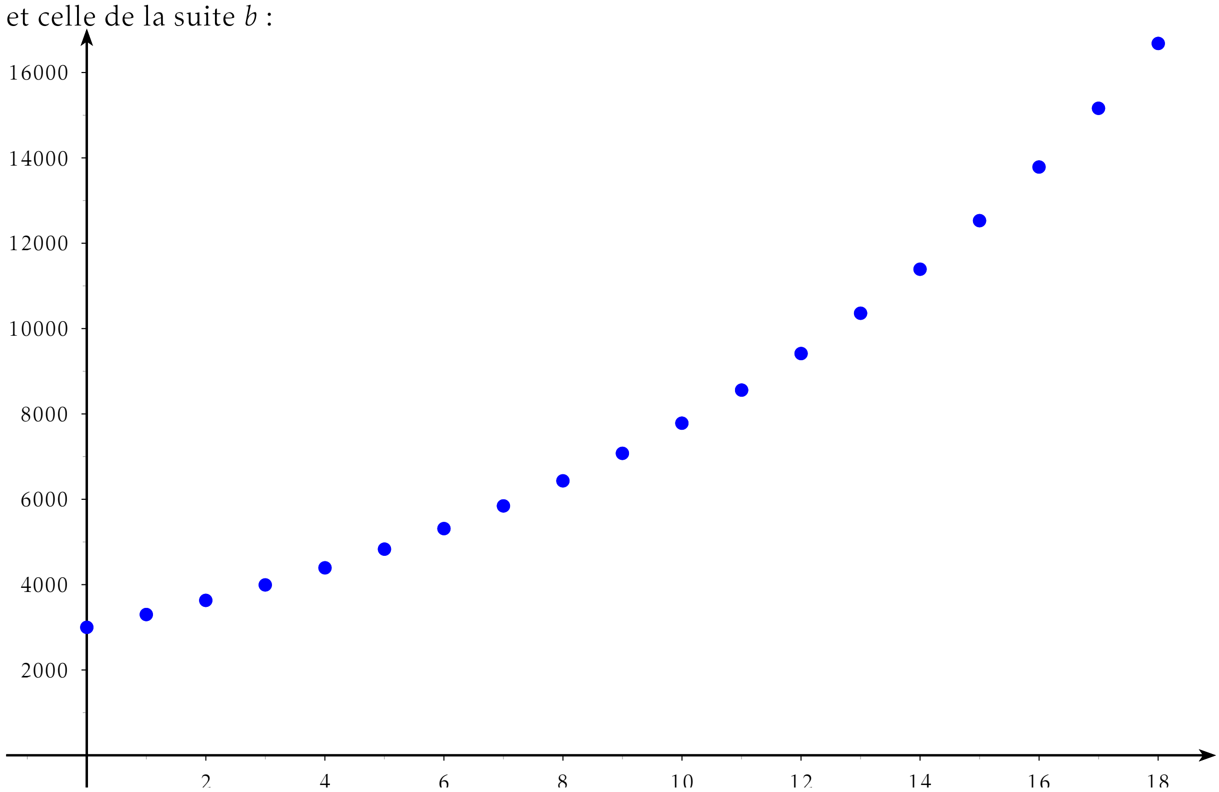
## 2 Représentation d'une suite

‡ **Propriété 1**
On peut représenter une suite par les points $(n; u_n)$ dans un repère.

**Exemple :**
On reprend l'exemple précédent.
La représentation de la suite $a$ donne :




et celle de la suite $b$ :



## 3 Variations de suites

**Définition 4**
Une suite $u$ est **croissante** si et seulement si pour tout $n$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
Une suite $u$ est **décroissante** si et seulement si pour tout $n$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
Une suite $u$ est **constante** si et seulement si pour tout $n$, $u_{n+1} = u_n$.
Sinon, on dit que la suite $u$ est non monotone.

**Exemple :**

• On définit la suite $u$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$.
On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$ :
$u_{n+1} - u_n = (u_n + 2) - u_n = u_n + 2 - u_n = 2$
Comme 2 est positif, on en déduit que $u_{n+1} - u_n$ l'est aussi : $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
Ainsi, la suite $u$ est croissante.
• La suite $a$ définie par $a_n = (-1)^n$ est non monotone, de même que la suite $s$ définir par $s_n = \sin(n)$.
• Étudier les variations des suites $v$ et $w$ définies par :
$\begin{cases} v_0 = -3 \\ v_{n+1} = v_n - n \end{cases}$ et $w_n = n^2 + 3$.

**Propriété 2**
On suppose que la suite $(u_n)$ est définie par une relation explicite : $u_n = f(n)$ où $f$ est une fonction définie sur $[0;+\infty[$.
Si $f$ est croissante sur $[0;+\infty[$, alors la suite $(u_n)$ est aussi croissante.
Si $f$ est décroissante sur $[0;+\infty[$, alors la suite $(u_n)$ est aussi décroissante.

**Exemple :**
Étudier le sens des variations des suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par :
$u_n = -n^2 + 4n + 15$ et $v_n = 3 - \sqrt{n}$.

**Propriété 3**
On suppose que $(u_n)$ est une suite de signe fixe (*i.e.* tout les termes sont strictement positifs ou tous sont strictement négatifs).
Si pour tout $n$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, la suite $(u_n)$ est croissante.
Si pour tout $n$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$, la suite $(u_n)$ est décroissante.

**Exemple :**
Étudier les variations des suites définies par : $u_n = \frac{5}{2^n}$ et $v_n = \frac{6^n}{1000}$.

## 4 Algorithme

Le but de cet algorithme sera d'indiquer le plus petit entier $n$ tel pour la suite $u$ de terme général $0,9^n$, on ait $u_n \leqslant 0,01$.

On propose l'algorithme suivant :

| | |
|---|---|
| Initialisation : | affecter à $u$ la valeur 1 ; |
| | affecter à $n$ la valeur 0 |
| Traitement : | Tant que $u < 0,01$ |
| | affecter à $u$ la valeur $0,95 \times u$ ; |
| | affecter à $n$ la valeur $n+1$. |
| | Fin Tant que |
| Sortie : | Afficher $n$. |