Angles orientés de vecteurs

1 Le cercle trigonométrique

1.1 Rappels sur le cercle

Définition 1
On se place dans le plan. Ω est un point et R un nombre réel positif.
Le cercle de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M tels que $\Omega M = R$.

Propriété 1
Le périmètre d'un cercle de rayon R est $2\pi R$.

Remarque : On peut définir ainsi le nombre π. Une valeur approchée du nombre π est 3,1416. π est un nombre irrationnel : on ne peut l'écrire comme le quotient de deux entiers.

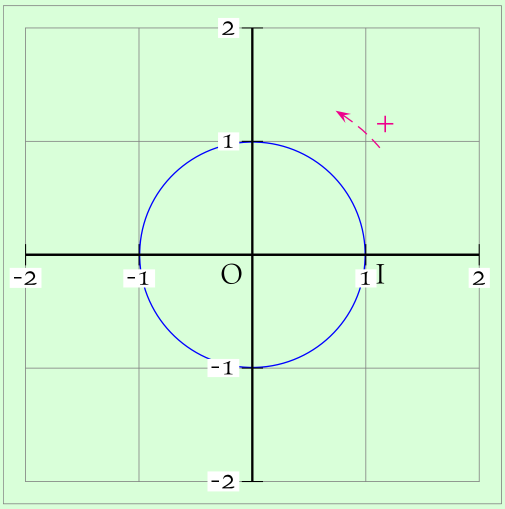
Définition 2
On se place dans le plan. On considère Ω un point et R un nombre réel positif.
Le disque de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M tels que $\Omega M \leqslant R$.

Propriété 2
L'aire d'un disque de rayon R est πR^2.

1.2 Le cercle trigonométrique

Définition 3

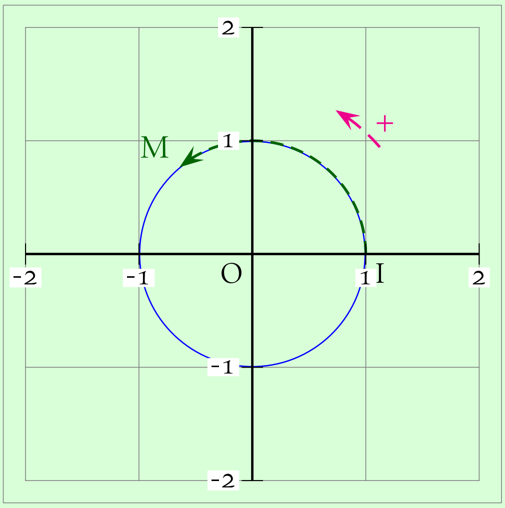
On se place dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.
Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O, de rayon 1 muni d'un sens : **le sens trigonométrique**.
Ce sens le sens « anti-horaire ».



Définition 4

On se place dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ et du cercle trigonométrique. On place le point I(1;0) sur le cercle.
On considère x un nombre réel. On associe à ce nombre x un point M sur le cercle trigonométrique de la manière suivante

- si $x \geqslant 0$, on parcourt le cercle trigonométrique la distance x en partant du point I et dans le sens trigonométrique ;
- si $x \leqslant 0$, on parcourt le cercle trigonométrique la distance x en partant du point I et dans le sens anti-trigonométrique.



Le point d'arrivée est le point M.
On dit qu'on a **enroulé la droite des réels sur le cercle trigonométrique**.

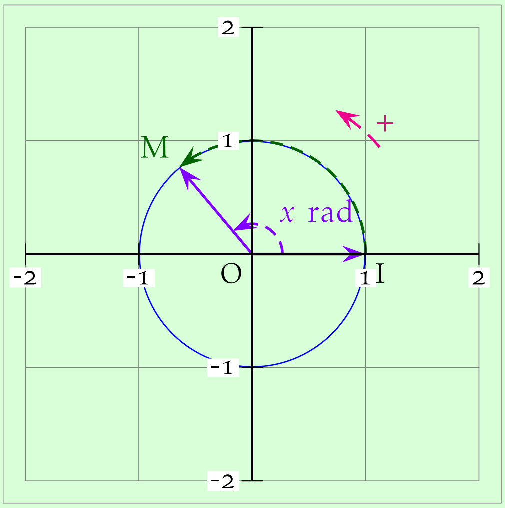
Propriété 3

On considère x un nombre réel, et M le point qui lui est associé par « enroulement ».
Les réels $x+2\pi$; $x-4\pi$; ... sont aussi associés au point M.
De manière plus générale, si k est un entier relatif : $k \in \mathbb{Z}$, les nombres x et $x+k\times 2\pi$ sont associés au même point du cercle par « enroulement ».

1.3 Le radian

Définition 5

On considère x un nombre réel, et M le point qui lui est associé par « enroulement ».
L'angle orienté $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$ est l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OM}$ et dans cet ordre là.
En outre, cet angle admet pour **mesure d'angle** x rad.



Propriété 4

Les mesures d'angle en degrés et en radians sont proportionnelles.
Ainsi, si d°et α rad expriment la même mesure d'angle, alors

π rad	180°
α rad	d°

est un tableau de proportionnalité.

2 Angles orientés

Définition 6

On considère $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls.
On définit M et N tels que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{v}$, et M′ et N′ comme points d'intersection respectifs des demi-droites [OM) et [ON) avec le cercle trigonométrique.
On définit alors l'angle orienté $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$ par :
$(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM'}) - (\overrightarrow{OI};\overrightarrow{ON'})$

Propriété 5

On considère un intervalle I d'amplitude 2π.
Tout angle y admet une unique mesure d'angle.
On dit que c'est **la mesure principale de cet angle dans** I.

Remarque : Les intervalles $[0;2\pi[$ et $[-\pi;\pi[$ sont les plus utilisés.

Propriété 6

Pour tous vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, on a

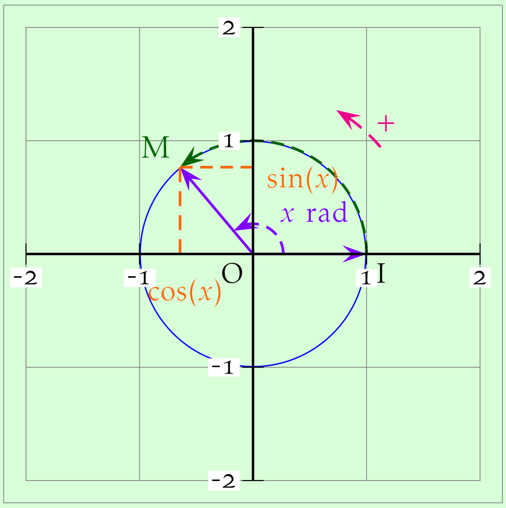
- $\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right) + \left(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\right) = \left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}\right)$ (relation de Chasles) ;
- $\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right) = -\left(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}\right)$ (anti-symétrie) ;
- $\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right) - \left(-\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right) = \pi[2\pi]$.

3 Cosinus et Sinus

3.1 Définitions

Définition 7

On se place dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
On considère x un nombre réel et M le point qui lui est associé par enroulement.
Le point M a alors par définition les coordonnées $M\Big(\cos(x);\sin(x)\Big)$.



Propriété 7
On considère x un nombre réel. Alors :

$$\cos(x)^2+\sin(x)^2=1$$

C'est **la relation fondamentale de la trigonométrie**.

Propriété 8
Pour tout x nombre réel, on a

- $-1\leqslant\cos(x)\leqslant 1$;
- $-1\leqslant\sin(x)\leqslant 1$.

3.2 Angles associés

‡ Propriété 9

On donne ces valeurs particulières de cosinus et de sinus :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

‡ Propriété 10

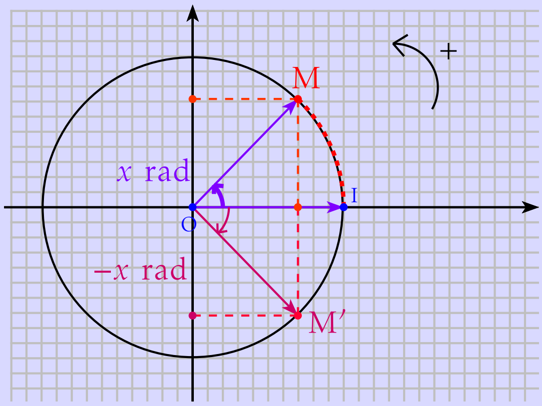
On considère x un nombre réel et k un entier relatif. Alors

$\cos(x + k \times 2\pi) = \cos(x)$ $\qquad$ $\sin(x + k \times 2\pi) = \sin(x)$

‡ Propriété 11

Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, on a :

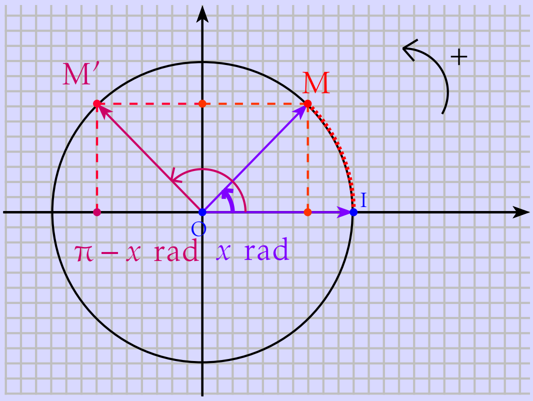
- $\cos(-x) = \cos(x)$;
- $\sin(-x) = -\sin(x)$.



‡ Propriété 12

Par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, on a :

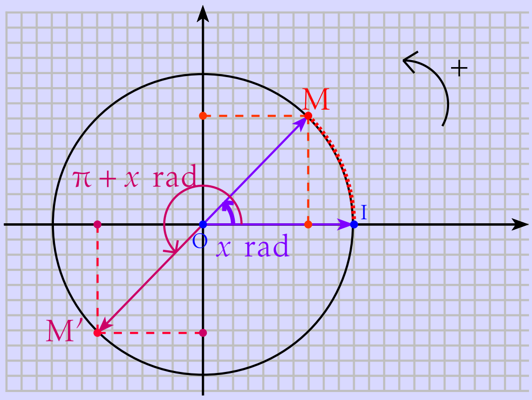
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$;
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$.



‡ Propriété 13

Par symétrie par rapport à l'origine du repère, on a

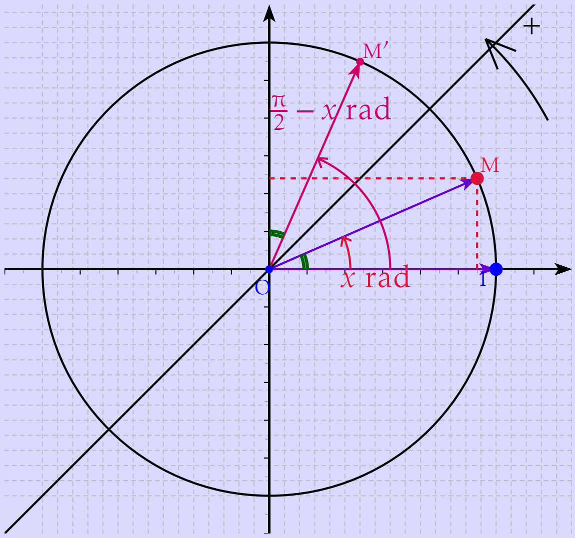
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$;
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$.



‡ **Propriété 14**

Par symétrie par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$, on a

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$;
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$.



Remarque : En combinant cette dernière symétrie avec la symétrie par rapport à l'axe des abscisses, on déduit une autre couple de relations

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin(x)$;
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos(x)$.

4 Équations trigonométriques

‡ **Propriété 15**

On considère a un nombre réel.
L'équation d'inconnue x : $\cos(x) = \cos(a)$ admet pour solution sur $\mathbb{R}$:
$\{a + k \times 2\pi, -a + k \times 2\pi; k \in \mathbb{Z}\}$

‡ **Propriété 16**

On considère a un nombre réel.
L'équation d'inconnue x : $\sin(x) = \sin(a)$ admet pour solution sur $\mathbb{R}$:
$\{a + k \times 2\pi, \pi - a + k \times 2\pi; k \in \mathbb{Z}\}$