Variations de fonctions

1 Fonctions composées

⊡**Définition 1**
u et v sont deux fonctions définies sur un même intervalle I.
La fonction somme $u+v$ est la fonction définie sur I par l'expression $x \mapsto u(x)+v(x)$.
La fonction produit $u \times v$ est la fonction définie sur I par l'expression $x \mapsto u(x) \times v(x)$.

1.1 Fonctions $u+\lambda$ et $\lambda \cdot u$

‡ **Propriété 1**
On considère u une fonction strictement monotone sur un intervalle I et λ un nombre réel.
Alors la fonction $u+\lambda : x \mapsto u(x)+\lambda$ a le même sens de variation que la fonction u sur I.

Exemple :
La fonction $x \mapsto x^2-\sqrt{2}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

‡ **Propriété 2**
Soient u une fonction strictement monotone sur un intervalle I et λ un nombre réel.
Alors la fonction $\lambda \cdot u : x \mapsto \lambda \times u(x)$ a :
- le même sens de variation que la fonction u sur I si $\lambda > 0$;
- le sens de variation contraire de celui de la fonction u sur I si $\lambda < 0$.

Exemple :
La fonction $x \mapsto \frac{-3}{x} = -3 \times \frac{1}{x}$ est strictement croissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

1.2 Fonctions $\sqrt{u}$ et $\frac{1}{u}$

⊡**Définition 2**
On considère u une fonction définie sur un intervalle I.
On suppose que u est positive sur I : pour tout nombre réel x de I, $u(x) \geqslant 0$.
On définit alors la fonction $\sqrt{u}$ est la fonction définie sur I par l'expression $x \mapsto \sqrt{u(x)}$.

‡ **Propriété 3**
On considère u une fonction définie sur un intervalle I.
On suppose que u est positive sur I : pour tout nombre réel x de I, $u(x) \geqslant 0$.
Alors la fonction $\sqrt{u}$ a le même sens de variation que la fonction u sur I.

Exemple : La fonction $x \mapsto x^2-1$ est positive et croissante sur $[1;+\infty[$,
on peut donc définir sur $[1;+\infty[$ la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2-1}$ qui est croissante sur $[1;+\infty[$.

Définition 3
On considère u une fonction définie sur un intervalle I.
On suppose que u qui ne s'annule pas sur I : pour tout nombre réel x de I, $u(x) \neq 0$.
On définit alors la fonction $\frac{1}{u}$ est la fonction définie sur I par l'expression $x \mapsto \frac{1}{u(x)}$.

‡ **Propriété 4**
On considère u une fonction définie sur un intervalle I.
On suppose que u qui ne s'annule pas sur I : pour tout nombre réel x de I, $u(x) \neq 0$.
Alors la fonction $\frac{1}{u}$ a le sens de variation contraire de celui de la fonction u sur I.

Exemple :
Sur l'intervalle $]3;+\infty[$, la fonction $x \mapsto x-3$ ne s'annule pas et est strictement croissante.
On peut alors définir la fonction $x \mapsto \frac{1}{x-3}$ et cette fonction est strictement décroissante sur $]3;+\infty[$.

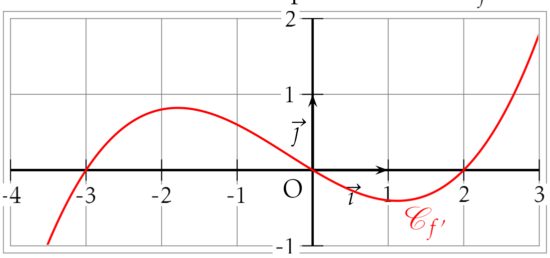
2 Lien entre signe de la dérivée et variation de la fonction originelle

Dans cette section, f sera une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

‡ **Propriété 5**
Si f est croissante sur I, alors pour tout nombre réel x de I, $f'(x) \geqslant 0$.
Si f est décroissante sur I, alors pour tout nombre réel x de I, $f'(x) \leqslant 0$.
Si f est constante sur I, alors pour tout nombre réel x de I, $f'(x) = 0$.

‡ **Propriété 6**
Si pour tout nombre réel x de I, $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur I.
Si pour tout nombre réel x de I, $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur I.
Si pour tout nombre réel x de I, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

Exemple :
On donne la courbe représentative $\mathscr{C}_{f'}$ de la dérivée d'une fonction f :



Sur $[-3;0]$, $\mathscr{C}_{f'}$ est au-dessus de l'axe des abscisses, donc pour $x \in [-3;0]$, $f'(x) \geqslant 0$.
Ainsi, f est croissante sur $[-3;0]$.
Sur $[0;2]$, $\mathscr{C}_{f'}$ est en-dessous de l'axe des abscisses, donc pour $x \in [0;2]$, $f'(x) \leqslant 0$.
Ainsi, f est décroissante sur $[0;2]$.
Sur $[2;3]$, $\mathscr{C}_{f'}$ est au-dessus de l'axe des abscisses, donc pour $x \in [2;3]$, $f'(x) \geqslant 0$.
Ainsi, f est croissante sur $[2;3]$.

Exemple :
Donner les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 1$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$:
$f'(x) = \frac{1}{4} \times 4x^3 - \frac{2}{3} \times 3x^2 + \frac{1}{2} \times 2x + 0 = x^3 - 2x^2 + x$
Étudions le signe de f'. On peut factoriser son expression :
$f'(x) = x \times (x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2$
Comme $(x-1)^2 \geqslant 0$, $f'(x)$ est du signe de x.

En outre, f' s'annule en 0 et 1.
On dresse le tableau de signe de f', et on lui accole celui de variations de f :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
signe de x		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $(x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
variations de f		$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-\frac{11}{12}$	$\nearrow$	

3 Optimisation

‡ Propriété 7
On suppose que f admet un extremum en x_0. Alors : $f'(x_0) = 0$.

Exemple :
On reprend l'exemple précédent. Grâce à son tableau de variations, on constate que f admet en 0 un minimum qui vaut -1.
En ce point là, la dérivée s'annule bien.
Cependant, on remarque que même si en 1 la dérivée s'annule aussi, f n'y admet pas d'extremum.

Exemple :
Une entreprise qui produit des tablettes veut rentabiliser au maximum ses marges.
Elle produit x milliers tablettes par mois et cela lui rapporte alors un bénéfice de :
$B(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 18x^2 + 2380x + 1200$, avec $x \in [20;100]$.
Trouver la quantité de tablettes qu'elle doit produire pour y arriver.
On dérive la fonction B :
$B'(x) = -\frac{1}{3} \times 3x^2 + 18 \times 2x + 2380 + 0 = -x^2 + 36x^2 + 2380$
Étudions le signe de B' :
B' est une fonction polynomiale du deuxième degré, on calcule son déterminant :
$\Delta = 36^2 - 4 \times (-1) \times 2380 = 1296 + 9520 = 10816$
Δ est positif, on calcule les racines :
$x_1 = \frac{-36+\sqrt{10816}}{2\times(-1)} = -34$ et $x_2 = \frac{-36-\sqrt{10816}}{2\times(-1)} = 70$
On rejette x_2 car $x_2 < 20$, on trace le tableau de variations de B :

x	20		70		100
signe de $B'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de B	53 430	$\nearrow$	141 666	$\searrow$	85 866