Résolutions graphiques d'équations & d'inéquations

1 Ensembles

1.1 Ensembles listes

Définition 1

On peut écrire une liste de nombres sous forme d'un ensemble. Par convention, cet ensemble est délimité par des accolades.

Exemple 1

- $\left\{\frac{1}{3};2;-4\right\}$ est l'ensemble constitué des nombres $\frac{1}{3}$; 2 et -4.
- Un ensemble peut être constitué d'un seul élément : $\{3\}$ est l'ensemble constitué du nombre 3 (on parle de « singleton 3 »).

Remarque : Après avoir résolu une équation, il faut systématiquement donner cet ensemble solution en utilisant les notations correctes.

Exemple 2

Résoudre l'équation $5x+2=0$.

$5x+2=0$, donc $5x=-2$, puis $x=-\frac{2}{5}$.

On conclut : $S=\left\{-\frac{2}{5}\right\}$, où S symbolise **l'ensemble solution**.

Définition 2

L'ensemble vide est un ensemble ne contenant aucun élément.
On le note $\varnothing$, parfois $\{\}$.

Exemple 3

Résoudre l'équation $2x=2(x-1)+3$.
On trouve $2x=2x-2+3$, puis $0=1$, ce qui est absurde : cette équation n'a pas de solution.
L'ensemble solution est alors l'ensemble vide : $S=\varnothing$

1.2 Intervalles bornés

Définition 3

Un **intervalle borné** est un ensemble de nombres déterminé par un encadrement.
On considère deux nombres réels a et b tels que $a \leqslant b$.

- L'ensemble des nombres x tels que $a \leqslant x \leqslant b$ se note $[a\,;b]$.

- L'ensemble des nombres x tels que $a < x \leqslant b$ se note $]a\,;b]$.

- L'ensemble des nombres x tels que $a \leqslant x < b$ se note $[a\,;b[$.

- L'ensemble des nombres x tels que $a < x < b$ se note $]a\,;b[$.

1.3 Réunion de deux intervalles

Définition 4

Pour deux intervalles I et J, la réunion de I et J, notée $\mathrm{I} \cup \mathrm{J}$, est l'ensemble des nombres qui appartiennent à I <u>OU</u> à J.

Remarque :
Le « OU » est un « ou large » et non un « ou » strict : ainsi, si un nombre appartient à I et à J, il appartient à $\mathrm{I} \cup \mathrm{J}$.
Par exemple, dans le cas où $\mathrm{I} = [0\,;2]$ et $\mathrm{J} = [1\,;3]$, alors $\mathrm{I} \cup \mathrm{J} = [0\,;3]$.

Exemple 4

Si $\mathrm{I} = [1\,;3]$ et $\mathrm{J} =]2\,;+\infty[$, alors $\mathrm{I} \cup \mathrm{J} = [1\,;+\infty[$.
Si $\mathrm{I} = [0\,;1]$ et $\mathrm{J} = [2\,;3]$, alors $\mathrm{I} \cup \mathrm{J} = [0\,;1] \cup [2\,;3]$, ici la réunion de ces deux intervalles ne peut s'écrire comme un seul intervalle, on laisse alors le signe « $\cup$ ».

2 Équations & inéquations graphiques

Remarque : Comme on procèdera à des résolutions graphiques, les solutions de ces résolutions sont approximatives.

2.1 Équations du type « $f(x) = k$ »

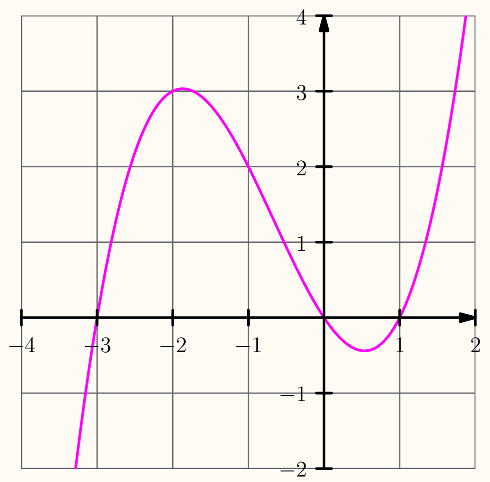
♯ Propriété 1

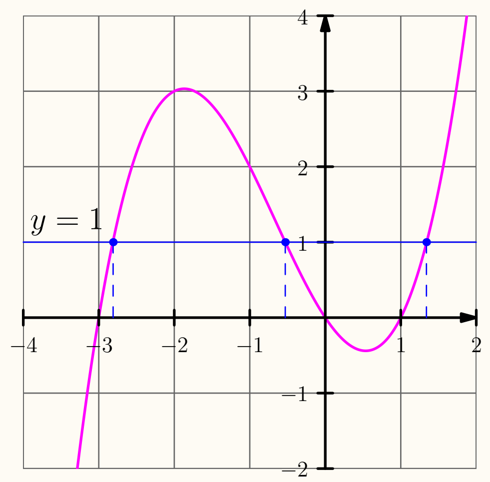
On considère une fonction f définie sur un ensemble $\mathcal{D}$ dont on s'intéresse à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$. k est un nombre réel.
Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = k$ consiste à trouver les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ qui sont d'ordonnée k.
Pour cela :

- on trace la droite d'équation $y = k$, c'est à dire la droite parallèle à l'axe des abscisses (c'est à dire horizontale) et qui passe par le point $(0;k)$ de l'axe des ordonnées ;
- on fait apparaître les points d'intersection de cette droite avec la courbe représentative $\mathscr{C}_f$;
- on lit les abscisses de ces points : ce sont les solutions de cette équation.

↪ Exemple 5

On donne la courbe représentative d'une fonction. Résoudre l'équation $f(x) = 1$.





On trace la droite d'équation $y = 1$, on trouve 3 points d'intersection dont on lit les abscisses.
Les solutions sont $-2{,}5$; -1 et $1{,}5$.
$S = \{-2{,}5 ; -1 ; 1{,}5\}$.

2.2 Inéquations du type « $f(x) \leqslant k$ »

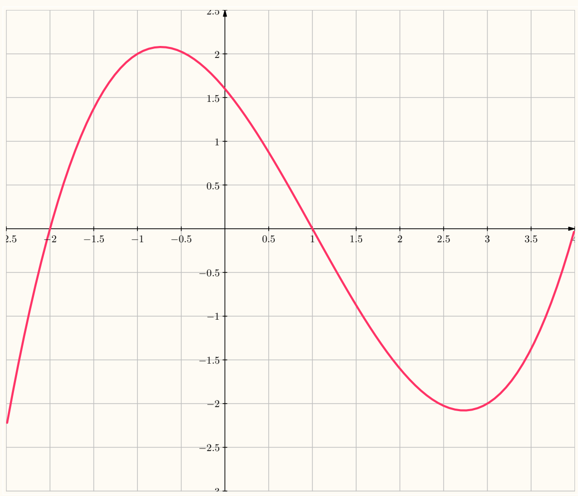
‡ Propriété 2

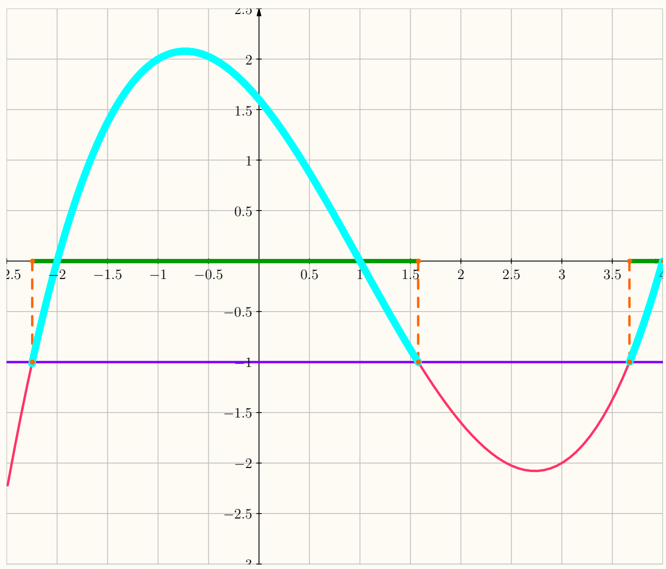
On considère une fonction f définie sur un ensemble $\mathcal{D}$ dont on s'intéresse à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$. k est un nombre réel.
Résoudre graphiquement l'équation $f(x) \leqslant k$ consiste à trouver les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ dont l'ordonnée est inférieure à k.
Pour cela :

- on trace la droite d'équation $y = k$;
- on fait apparaître les points d'intersection de cette droite avec la courbe représentative $\mathscr{C}_f$;
- on lit les abscisses de ces points ;
- on répond en utilisant l'écriture des intervalles.

↪ Exemple 6

On considère la fonction f définie par la courbe ci-contre. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant -1$.





On trace la droite $y = -1$, elle intersecte en trois points la courbe représentative de la fonction f.
On lit les abscisses respectives de ses points qui sont approximativement $-2,3$; $1,6$ et $3,7$.
Les abscisses pour lesquelles la courbe de f est au-dessous de la droite $y = -1$ sont donc comprises entre $-2,3$ et $1,6$ d'une part et entre $3,7$ et 4 d'autre part.
$\mathrm{S} = [-2,3 ; -1,6] \cup [3,7 ; 4]$.

2.3 Équations du type « $f(x) = g(x)$ »

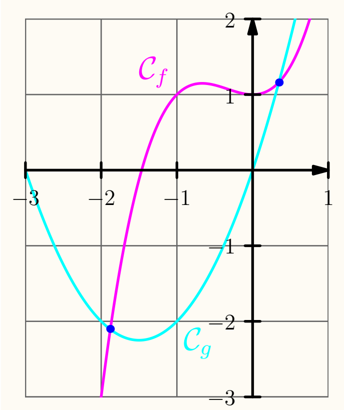
♯ Propriété 3

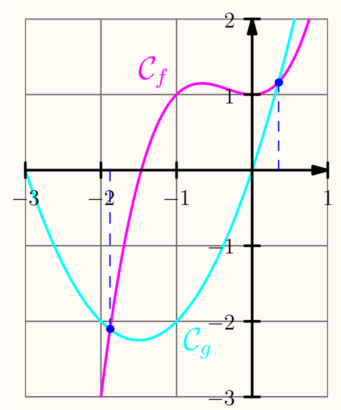
On considère deux fonctions f et g définies sur un même ensemble $\mathcal{D}$; on s'intéresse à leur courbe représentative $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ consiste à trouver les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
Pour cela :

- on fait apparaître les points d'intersection de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$;
- on lit les abscisses de ces points : ce sont les solutions de cette équation.

↪ Exemple 7

On donne sur l'intervalle $[-3;1]$ les courbes représentatives de deux fonctions f et g.





On fait apparaître les points d'intersection, puis on lit les abscisses de ces points.
$S = \{-1,9;0,4\}$.

2.4 Inéquations du type « $f(x) \leqslant g(x)$ »

♯ Propriété 4

On considère deux fonctions f et g définies sur un même ensemble $\mathscr{D}$; on s'intéresse à leur courbe représentative $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$ consiste à trouver les abscisses des points telles que $\mathscr{C}_f$ soit « en-dessous » de $\mathscr{C}_g$.
Pour cela :

- on fait apparaître les points d'intersection de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$;
- on lit les abscisses de ces points ;
- on répond en utilisant l'écriture des intervalles.

↪ Exemple 8

En reprenant les courbes précédentes, résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $[-1,9;0,4]$.

3 Signes d'une fonction

Dans toute cette section, on considère une fonction f définie sur un intervalle I.

Définition 5

Déterminer le signe de f sur I, c'est résoudre les inéquations $f(x) \leqslant 0$ et $f(x) \geqslant 0$.

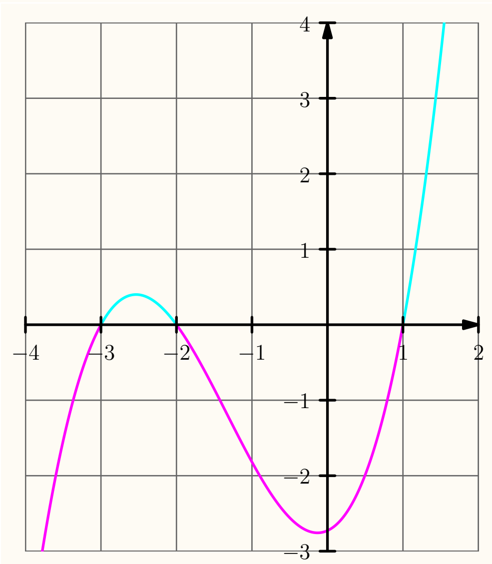
Propriété 5

Dans le cas d'une résolution graphique, déterminer le signe déterminer le signe de f revient à déterminer :

- sur quels intervalles la courbe représentative de la fonction f est « en-dessous » de l'axe des abscisses ($\rightsquigarrow$ résolution de $f(x) \leqslant 0$) ;
- sur quels intervalles la courbe représentative de la fonction f est « au-dessus » de l'axe des abscisses ($\rightsquigarrow$ résolution de $f(x) \geqslant 0$).

Exemple 9

On considère la fonction dont la fonction représentative est donnée ci-contre.
Déterminer son signe sur $[-4;2]$.
Intervalles où la courbe est en-dessous de l'axe des abscisses : $[-4;-3]$, $[-2;1]$.
On conclut : $f(x) \leqslant 0$ pour $x \in [-4;-3] \cup [-2;1]$.
Intervalles où la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses : $[-3;-2]$, $[1;2]$.
On conclut : $f(x) \geqslant 0$ pour $x \in [-3;-2] \cup [1;2]$.



On peut aussi synthétiser tout cela dans un tableau de signes :

x	-4		-3		-2		1		2
Signe de f		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

N.B. : pour réaliser un tableau de signes de manière graphique :

- on détermine l'ensemble de définition (où la courbe est tracée) : ce sont les bornes de la première ligne ;
- on lit les abscisses où la courbe coupe l'axe des abscisses : ce sont les antécédents de 0, on met ces abscisses dans la première ligne et 0 en face en-dessous ;
- on complète la deuxième ligne en mettant des $+$ (courbe au-dessus de l'axe des abscisses) ou des $-$ (courbe en-dessous de l'axe des abscisses) entre deux 0 ou extrémités.

4 Variations d'une fonction

Définition 6

Pour une fonction f, définie sur un intervalle I,

- on dit que la fonction f est **strictement décroissante** sur l'intervalle I si par lecture des antécédents de la gauche vers la droite ($\rightarrow$), les images deviennent de plus en plus petites ($\downarrow$) ;
- on dit que la fonction f est **strictement croissante** sur l'intervalle I si par lecture des antécédents de la gauche vers la droite ($\rightarrow$), les images deviennent de plus en plus grandes ($\uparrow$) ;
- on dit que la fonction f est **constante** sur l'intervalle I si par lecture des antécédents de la gauche vers la droite ($\rightarrow$), les images restent égales ($\longrightarrow$).

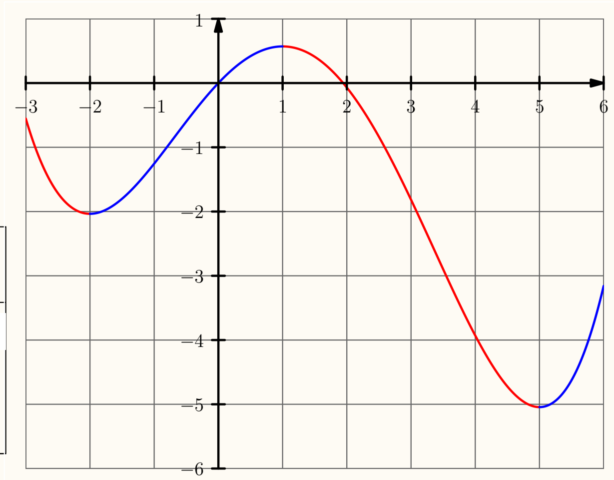
N.B. : sur un intervalle, une fonction peut n'être ni croissante, ni décroissante.

N.B.2 : sur un intervalle, une fonction est dite croissante si elle strictement croissante ou constante ou une combinaison des deux (et de même pour définir une fonction décroissante).

Exemple 10

La fonction g représentée ci-contre n'est ni croissante, ni décroissante sur $[-3;6]$.
Néanmoins, g est strictement décroissante sur $[-3;2]$ et sur $[1;5]$ et elle est strictement croissante sur $[-2;1]$ et sur $[5;6]$.

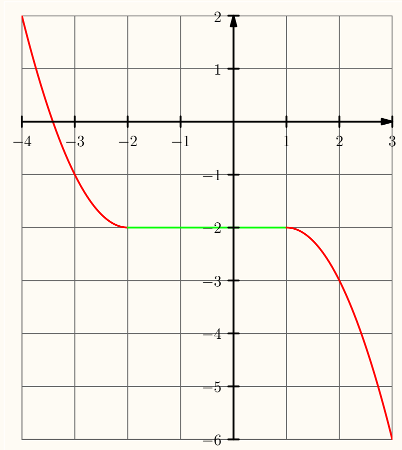
x	-3		-2		1		5		6
Variations de g	$-0{,}5$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$0{,}5$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$-3{,}2$



Exemple 11

La fonction h représentée ci-contre est décroissante sur $[-4;3]$.
Plus précisément, h est strictement décroissante sur $[-4;-2]$ et sur $[1;3]$ et elle est constante sur $[-2;1]$.

x	-4		-2		1		3
Variations de h	2	$\searrow$	-2	$\longrightarrow$	-2	$\searrow$	-6



N.B. 3 : pour réaliser un tableau de variation de manière graphique :

- on détermine l'ensemble de définition (où la courbe est tracée) : ce sont les bornes de la première ligne ;
- on lit les abscisses où la courbe change de variation (« sommets » et « vallées ») ;
- on complète la deuxième ligne en mettant les flèches décrivant la variation sur chaque intervalle d'antécédents ($\nearrow$ pour strictement croissante, $\searrow$ pour strictement décroissante et $\longrightarrow$ pour constante) ;
- on met les images aux extrémités des flèches.

5 Optimisation

Définition 7

Pour une fonction f définie sur un intervalle I,

- m est le **minimum** de f sur I si m possède au moins un antécédent par f sur I et si la valeur m est plus petite ou égale que toutes les images de f sur I ;
- M est le **maximum** de f sur I si m possède au moins un antécédent par f sur I et si la valeur M est plus grande ou égale que toutes les images de f sur I ;
- un **extremum** est un terme générique pour désigner un minimum ou un maximum.

N.B. : au pluriel, on dit « minima », « maxima » et « extrema ».

Exemple 12

La fonction g a pour maximum $0,5$ et pour minimum -5 sur l'intervalle $[-3;6]$.
Le maximum est atteint en $x=1$ et le minimum en $x=-2$.

x	-3		-2		1		5		6
Variations de g	$-0,5$	↘	-2	↗	$0,5$	↘	-5	↗	$-3,2$