# Proportions & évolutions

## 1 Proportions

**Définition 1**

Une **population** est composée d'individus ou d'éléments.
Un sous-groupe A d'une population E est une partie de E.
On note alors $A \subset E$.

**Définition 2**

Pour un sous-groupe A d'effectif $n$ dans une population E d'effectif N, la **proportion** de A dans E vaut $\frac{n}{N}$.

**Exemple 1**

- Au lycée Max Linder, on dénombre 1 850 élèves dont 650 en seconde. La proportion d'élèves de seconde vaut $\frac{650}{1\,850} \approx 0,351$.
- Si dans une population de 400 chats, une proportion de $0,4$ est à poils longs, alors le nombre $n$ de chats à poils longs, alors $\frac{n}{400} = 0,4$, d'où $n = 160$.

**Propriété 1**

Une proportion est un nombre compris entre 0 et 1.

**Définition 3**

Une proportion peut être exprimée à l'aide d'un pourcentage : $a\ \% = \frac{a}{100}$ (« $a$ pour cent »).

**Propriété 2**

Si A est un sous-groupe d'une population E et B un sous-sous-groupe de A ($B \subset A$ et $A \subset E$), on note

- $p$ la proportion d'éléments de A dans E ;
- $p'$ la proportion d'éléments de B dans A,

la proportion d'éléments de B dans E vaut $p'p$.

**Exemple 2**

Au lycée Max Linder, $35,1\ \%$ des élèves sont en seconde et parmi les élèves de seconde, $15\ \%$ sont blonds. Ainsi, au lycée Max Linder, la proportion d'élèves de secondes blonds vaut $35,1\ \% \times 15\ \% = 0,052\,65 = 5,265\ \%$.

### Définition 4

On peut exprimer des proportions à l'aide des symboles suivants :

- $a$ ‰ $= \dfrac{a}{1\ 000}$ (« $a$ pour mille ») ;
- deux quantités $q_1$ et $q_2$ sont dans le ratio $a : b$ : $\dfrac{q_1}{a} = \dfrac{q_2}{b}$ ;
- trois quantités $q_1$ ; $q_2$ et $q_3$ sont dans le ratio $a : b : c$ : $\dfrac{q_1}{a} = \dfrac{q_2}{b} = \dfrac{q_3}{c}$.

### Exemple 3

- 8 ‰ des femmes sont daltoniennes, soit $0,8$ %.
- La recette traditionnelle de la margarita est réalisée à partir d'un ratio $3 : 2 : 1$ de tequila, triple sec et jus de lime. Ainsi, pour 6 c$\ell$ de tequila, on met 4 c$\ell$ de triple sec et 2 c$\ell$ de jus de lime.

## 2 Opérations de sous-groupes

E est un ensemble d'éléments. Pour $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$, on note $p(\mathrm{A})$ la proportion d'éléments de A dans E.

### Définition 5

Pour $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$, le complémentaire de A dans E est l'ensemble des personnes n'étant pas dans E.
On le note $\overline{\mathrm{A}}$ ou $\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}$.

### Propriété 3

Pour $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$, $p(\mathrm{A}) + p\left(\overline{\mathrm{A}}\right) = 1$.

### Exemple 4

Comme $35,1$ % des élèves du lycée Max Linder sont en seconde, $1 - 35,1\ \% = 64,9$ % ne sont pas en seconde.

### Définition 6

Pour $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ et $\mathrm{B} \subset \mathrm{E}$,

- $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ (« A inter B ») représente l'ensemble des éléments présents dans A et dans B ;
- $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ (« A union B ») représente l'ensemble des éléments présents dans A et dans B.

### Propriété 4

Pour $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ et $\mathrm{B} \subset \mathrm{E}$, $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) + p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B})$.

### Exemple 5

En France, on note A l'ensemble des personnes de groupe A et P l'ensemble des personnes de rhésus positif.
Le site du ministère de la santé indique que 45 % de la population est de groupe A, 85 % de la population est de rhésus positif, et que 38 % est de groupe A et de rhésus positif.
On a ainsi : $p(\mathrm{A}) = 0,45$, $p(\mathrm{P}) = 0,85$ et $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{P}) = 0,38$.
On peut en déduire que $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{P}) = 0,85 + 0,45 - 0,38 = 0,92 = 92$ % de la population est de groupe A ou de rhésus positif.

## 3 Évolutions

**Définition 7**

Une grandeur évolue d'une valeur $V_0$ vers une valeur $V_1$.
Le taux d'évolution est alors de $\tau = \dfrac{V_1 - V_0}{V_0}$.

**Exemple 6**

- En une année, le nombre d'applications sur smartphone d'un usager est passé de 35 à 46, le taux d'évolution vaut $\dfrac{42-36}{36} \approx 0,17 = 17\ \%$.
- La production de haricots d'un maraîcher est passé de 540 kg à 465 kg, le taux d'évolution vaut $\dfrac{465-540}{540} \approx -0,139 = -13,9\ \%$.

**Propriété 5**

Un taux d'évolution positif est associé à une augmentation, et un taux d'évolution négatif est associé à une baisse.

**Définition 8**

Pour un taux $\tau$, le coefficient multiplicateur (CM) associé vaut $c = 1 + \tau$.

**Exemple 7**

- Une hausse de 15 % est associé à un CM de $1 + 15\ \% = 1,15$.
- Une baisse de 32 % est associé à un CM de $1 - 32\ \% = 0,68$.

**Propriété 6**

Si une valeur $V_0$ évolue au taux $\tau$, alors sa nouvelle valeur vaut
$V_1 = V_0 \times (1 + \tau) = V_0 \times \text{CM}$.

**Exemple 8**

- Une valeur de 30 qui connaît une de hausse de 15 % vaudra $30 \times 1,15 = 34,5$.
- Une valeur de 170 qui connaît une baisse de 32 % vaudra $170 \times 0,68 = 115,6$.

**Définition 9**

Pour un taux $\tau$, **le taux réciproque** est le taux permettant d'annuler son évolution.

**Exemple 9**

Un article coûte 50 €.

- Après une hausse de 20 %, soit un CM de $1 + 20\ \% = 1,2$, il vaudra $50 \times 1,2 = 60$ €.
- Si, après augmentation, son prix baisse de 16,7 %, soit un CM de $1 - 16,7\ \% = 0,833$, il vaudra $60 \times 0,833 = 49,98 \approx 50$ €.

Les taux +20 % et −16,7 % sont donc réciproques.

### Propriété 7

Pour un taux $\tau$ et son taux réciproque $\tau'$, les coefficients multiplicateurs sont inverses l'un de l'autre.

### Exemple 10

En effet, pour une hausse de 20 %, le CM vaut $1,2$.
Or, l'inverse du CM donne $\frac{1}{1,2} \approx 0,833$ et donc $\tau'$ vérifie $1+\tau' = 0,833$,
soit $\tau' = -0,167 = -16,7$ %.

### Propriété 8

Dans le cas d'évolutions successives, les coefficients multiplicateurs se multiplient.

### Exemple 11

- Si une valeur de 50 est augmenté trois fois de suite de 20 %, alors sa valeur finale est de $50 \times 1,2^3 \approx 86,4$.
- Si une valeur de 160 est augmenté de 15 % (CM $= 1,15$), puis baissé de 30 % (CM $= 0,7$), alors sa valeur finale est de
  $160 \times 1,15 \times 0,7 \approx 128,8$.