Conditionnement

1 Probabilités conditionnelles

Définition 1

A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire. On suppose que $\mathbf{P}(A) \neq 0$.
La probabilité conditionnelle de l'événement B **sachant que l'événement** A **est réalisé**, que l'on appelle **probabilité de** B **sachant** A par abus de langage, est le nombre $\mathbf{P}_A(B)$ défini par

$$\mathbf{P}_A(B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Remarque : Dans un cas fini, c'est le rapport entre le nombre d'éléments de l'univers présents dans A et réalisant B (soit l'ensemble $A \cap B$) et le nombre d'éléments dans A.

Propriété 1

A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire. On suppose que $\mathbf{P}(A) \neq 0$.

- $0 \leqslant \mathbf{P}_A(B) \leqslant 1$;
- $\mathbf{P}_A(B) + \mathbf{P}_A\left(\overline{B}\right) = 1$.

Exemple 1

Parmi les habitants des quartiers Evergreen (événement E) et Melrose (événement M), on s'intéresse aux possesseurs de téléphone de marque Pear (événement P) et Cyborg (événement C).

- Dans l'échantillon étudié, il y a deux fois plus d'habitants du quartier Evergreen que Melrose.
- Parmi les habitants d'Evergreen, 45 % possèdent un téléphone de marque Pear.
- 68 % des habitants de Melrose ont opté pour un téléphone de marque Cyborg.

1. Traduire les données sous forme de probabilités, éventuellement conditionnelles.
2. Donner les valeurs de $\mathbf{P}_E\left(\overline{P}\right)$ et $\mathbf{P}_{\overline{E}}\left(\overline{P}\right)$.

Propriété 2

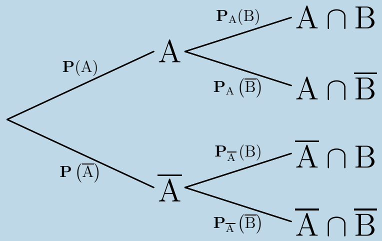
A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire.
On suppose que les événements A et B sont non impossibles, *i.e.* que $\mathbf{P}(A) \neq 0$ et que $\mathbf{P}(B) \neq 0$.

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}_A(B) \times \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}_B(A) \times \mathbf{P}(B).$$

2 Probabilités totales

Propriété 3

Dans une expérience aléatoire, on considère deux événements A et B. On peut représenter la situation par **un arbre de probabilités**.



Remarque : Par abus d'écriture, on omet souvent de préciser l'intersection pour les nœuds au-delà du deuxième étage. Ainsi, dans la propriété précédente, on obtiendrait le même arbre mais avec uniquement B ou $\overline{B}$ au deuxième étage.

Propriété 4

Voici trois règles régissant les arbres pondérés

- La somme des probabilités issues d'un même nœud fait 1.
- La probabilité d'un chemin vaut le produit des probabilités inscrites sur chaque branche parcourue.
- La probabilité d'un événement correspondant à plusieurs chemins est la somme de des probabilités de chaque chemin.

Exemple 2

En reprenant l'exemple précédent, déterminer $\mathbf{P}(C)$. Interpréter cette valeur.

Propriété 5 : Formule des probabilités totales

On considère $A_1, \ldots, A_n$, chacun non impossible, deux à deux incompatibles et tels que leur réunion est l'univers Ω.

On a ainsi : pour tout $k \in [\![1\,;n]\!], \mathbf{P}(A_k) \neq 0$, $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$ et $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$.

On dit alors que la famille $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est une partition de l'univers Ω ou encore que c'est un système complet d'événements.
Alors, pour tout événement B,

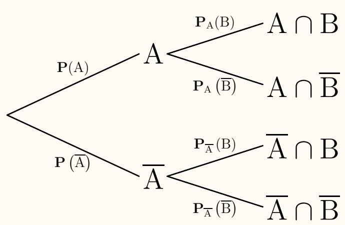
$$\mathbf{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k \cap B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k) \times \mathbf{P}_{A_k}(B) = \mathbf{P}(A_1) \times \mathbf{P}_{A_1}(B) + \cdots + \mathbf{P}(A_n) \times \mathbf{P}_{A_n}(B).$$

Exemple 3

Pour réaliser l'événement B, on a trois possibilités :

- réaliser $A_1 \cap B$, de probabilité $\mathbf{P}(A_1 \cap B)$;
- réaliser $A_2 \cap B$, de probabilité $\mathbf{P}(A_2 \cap B)$;
- réaliser $A_3 \cap B$, de probabilité $\mathbf{P}(A_3 \cap B)$;

et donc $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A_1 \cap B) + \mathbf{P}(A_2 \cap B) + \mathbf{P}(A_3 \cap B)$.



Exemple 4

En reprenant l'exemple précédent, présenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

3 Indépendance

Définition 2

On considère A et B deux événements non impossibles.
A et B sont **indépendants** si $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$.

Remarque : L'indépendance et la causalité sont des notions distinctes.

Exemple 5

En reprenant l'exemple précédent, déterminer si les événements P et C sont indépendants.
Interpréter le résultat.

Propriété 6

Si A et B sont **indépendants**, alors $\overline{A}$ et B le sont aussi.

Démonstration

Propriété 7

On considère A et B deux événements non impossibles, *i.e.* que $\mathbf{P}(A) \neq 0$ et que $\mathbf{P}(B) \neq 0$.
Les événements A et B sont **indépendants**

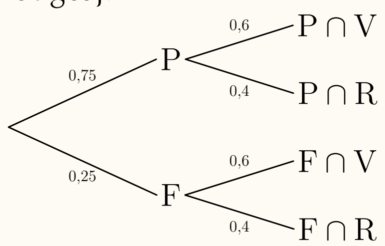
$\iff \mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$

$\iff \mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B)$

$\iff \mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A)$

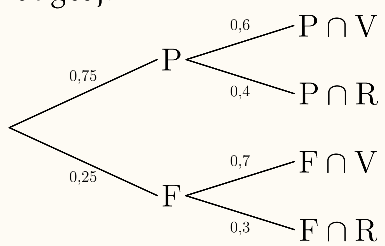
Exemple 6

On lance une pièce truquée qui a une probabilité de faire « pile » avec $\dfrac{3}{4}$.
Si la pièce fait « pile », on pioche une boule dans l'urne $U_1 = \{$ 3 boules vertes, 2 rouges$\}$.
Si la pièce fait « face », on pioche une boule dans l'urne $U_2 = \{$ 9 boules vertes, 6 rouges$\}$.



Et par exemple,
$\mathbf{P}(V) = 0,75 \times 0,6 + 0,25 \times 0,6 = 0,6$
puis $\mathbf{P}(P) \times \mathbf{P}(V) = 0,75 \times 0,6 = 0,45$ et
$\mathbf{P}(P \cap V) = 0,6 \times 0,75 = 0,45$
donc les événements P et V sont indépendants : le résultat du pile ou face n'influe pas sur les résultats du tirage de l'urne.

On lance une pièce truquée qui a une probabilité de faire « pile » avec $\dfrac{3}{4}$.
Si la pièce fait « pile », on pioche une boule dans l'urne $U_1 = \{$ 3 boules vertes, 2 rouges$\}$.
Si la pièce fait « face », on pioche une boule dans l'urne $U_2 = \{$ 7 boules vertes, 3 rouges$\}$.



Et par exemple,
$\mathbf{P}(V) = 0,75 \times 0,6 + 0,25 \times 0,7 = 0,625$
puis $\mathbf{P}(P) \times \mathbf{P}(V) = 0,75 \times 0,625 = 0,46\,875$ et
$\mathbf{P}(P \cap V) = 0,6 \times 0,75 = 0,45$
donc les événements P et V ne sont pas indépendants : le résultat du pile ou face a une influence numérique sur les résultats du tirage de l'urne.