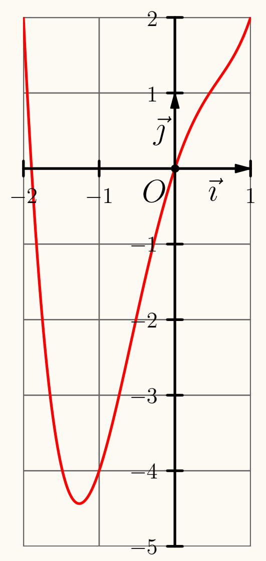
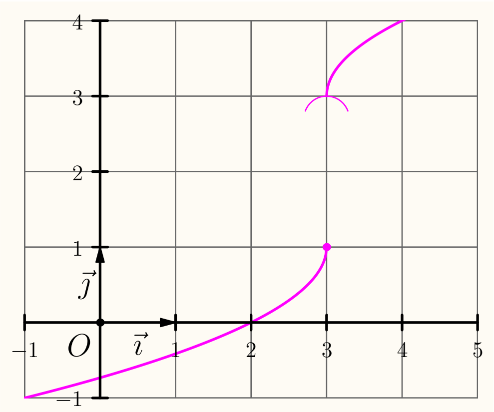
FONCTIONS : CONTINUITÉ

1 Notion de continuité

Exemple 1



Courbe représentative d'une fonction continue sur $[-2;1]$. ($x \longmapsto x^4 - 2x^2 + 3x$).



Courbe représentative d'une fonction non continue sur $[-2;5]$.
On dit que f admet un point de discontinuité en 3.
Par convention, le « point » signifie que l'image de 3 est 1 et non 3 (là où il y a l'arc de cercle).
Cependant, f est continue sur $[-2;3]$ et sur $]3;5]$.

$$x \longmapsto \begin{cases} -\sqrt{3-x}+1 \text{ si } x \leqslant 3 \\ \sqrt{x-3}+3 \text{ si } x > 3 \end{cases}.$$

Remarque :
Quand on parle de continuité ou de discontinuité d'une fonction, il faut **obligatoirement** préciser l'intervalle où elle a lieu : dire juste « f est continue » n'a *aucun sens*.
En outre, il faut bien que cela soit un intervalle : dire « f est continue sur $[0;1]\cup[2;3]$ » n'a aucun sens ; on peut cependant dire « f est continue sur $[0;1]$ et sur $[2;3]$ ».

2 Cas des fonctions usuelles

Propriété 1

Les fonctions usuelles sont continues sur les intervalles de leurs ensemble de définition :

- les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$;
- la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0;+\infty[$;
- la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$;
- toute fonction obtenue par opération des précédentes est continue sur son ensemble de définition.

↪ Exemple 2

- La fonction polynomiale $x \mapsto x^3 - x^2 + x - 1$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x-2}$ est continue sur son ensemble de définition. Cette fonction est donc définie si $x - 2 \geqslant 0$, c'est à dire si $x \geqslant 2$. Son ensemble de définition est donc : $[2;+\infty[$.
  $x \mapsto \sqrt{x-2}$ est donc continue sur $[2;+\infty[$.
- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$ est continue sur son ensemble de définition.
  Cette fonction est donc définie si $x^2 - 1 \neq 0$, c'est à dire si $x \neq -1$ et $x \neq 1$.
  Son ensemble de définition est donc $]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$.
  $x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$ est donc continue sur $]-\infty;-1[$, sur $]-1;1[$ et sur $]1;+\infty[$.

‡ Propriété 2

Si une fonction f dérivable sur un intervalle I, alors elle est continue sur cet intervalle I.

Remarque : Bien que la fonction racine carrée soit continue sur $[0;+\infty[$, elle n'y est pas dérivable mais seulement sur $]0;+\infty[$. La réciproque de cette propriété est donc fausse.

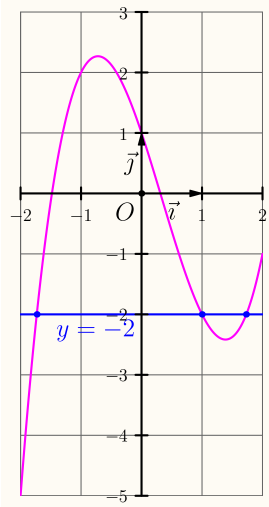
3 Théorèmes des valeurs intermédiaires

⊛ Théorème 1 : Théorème des valeurs intermédiaires (T.V.I.)

On considère une fonction f continue sur un intervalle I et a et b deux nombres réels de I, avec $a < b$.
k est un nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$: $f(a) \leqslant k \leqslant f(b)$ ou $f(b) \leqslant k \leqslant f(a)$.
Alors k admet un antécédent par f : il existe c entre a et b : $a \leqslant c \leqslant b$ tel que : $f(c) = k$.

↪ Exemple 3

On considère la fonction dont la courbe représentative est donnée :
On va étudier cette fonction sur $[-2;2]$.
Graphiquement, on voit que $f(-2) = -5$ et $f(2) = -1$.
Le théorème des valeurs intermédiaires nous dit alors :
comme -2 est compris entre $f(-2)$ et $f(2)$, c'est à dire entre -5 et -1, la courbe représentative de la fonction f, va nécessairement « traverser » la droite $y = -2$, et donc -2 a un antécédent par f ; ici il y en a mêmes trois : $-1{,}7$; 1 ; $1{,}7$.
On peut dire aussi que l'équation $f(x) = 2$ admet trois solutions : $S = \{-1{,}7;1;1{,}7\}$.



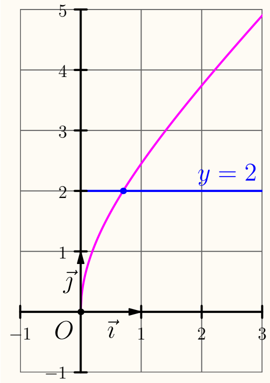
♯ Propriété 3 : Théorème des valeurs intermédiaires avec unicité

On suppose que f est continue et strictement monotone sur I.
On considère a et b deux nombres réels de I, avec $a < b$.
k est un nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$: $f(a) \leqslant k \leqslant f(b)$ ou $f(b) \leqslant k \leqslant f(a)$.
Alors k admet *un unique* antécédent par f : il existe *un unique* c tel que $a \leqslant c \leqslant b$ et $f(c) = k$.

Remarque :
Dans le cas où f est en plus strictement croissante (ou décroissante), elle coupe la droite $y = k$ une seule fois.

↪ Exemple 4

On considère la fonction f dont la représentation graphique est



Cette fonction est continue et strictement croissante sur $[0;4]$.
$f(0) = 0$ et $f(2) = 3{,}7$, donc pour $k = 2$, comme $0 \leqslant 2 \leqslant 3{,}7$, on sait que 2 admet un unique antécédent que l'on note c par f ; par lecture graphique, on trouve $c \approx 0{,}7$.
On peut dire aussi que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution : $\mathrm{S} = \{0{,}7\}$.

↪ Exemple 5

Donner le nombre de solutions de l'équation $\frac{1}{3}x^3 - x = 0$ sur $[-10;10]$.
On note $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$.
On va chercher à établir le tableau de variations de f.
f est dérivable sur $[-10;10]$:
$f'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 - 1 = x^2 - 1$

x	-10		-1		1		10
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f	$-\frac{970}{3}$	↗	$\frac{2}{3}$	↘	$-\frac{2}{3}$	↗	$\frac{970}{3}$

Sur $[-10;-1]$, f est continue et strictement croissante.
$f(-10) = -\frac{970}{3} \approx -323$ et $f(-1) = \frac{2}{3} \approx 0{,}67$
Comme $-\frac{970}{3} \leqslant 0 \leqslant \frac{2}{3}$, le théorème des valeurs intermédiaires s'applique : il existe un unique c_1 tel que $f(c_1) = 0$.
On a donc une solution pour l'équation $f(x) = 0$.
En l'appliquant à nouveau sur $[-1;1]$ et sur $[1;10]$, on trouve deux autres solutions.
L'équation $\frac{1}{3}x^3 - x = 0$ a donc trois solutions sur $[-10;10]$.

♯ Propriété 4 : Théorème des valeurs intermédiaires sur un intervalle

On considère une fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle $]a\,;b[$ où a désigne un nombre réel ou $-\infty$ et b désigne un nombre réel ou $+\infty$.
On suppose que f admet en a et b des limites.
Alors pour tout nombre réel k compris entre $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x)$, l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution dans l'intervalle $]a\,;b[$.

↪ Exemple 6

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+3x+1$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
On a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
variations de f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
De manière plus général, toute équation du troisième degré (ou de degré impair) admet au moins une solution : on appelle cette propriété « le théorème du passage à la douane ».

4 Dérivation et composition

♯ Propriété 5

On considère une u fonction strictement positive sur un intervalle I ; on peut alors définir la fonction $\sqrt{u}$ sur I.
Si la fonction u est dérivable sur I, alors $\sqrt{u}$ aussi et :
$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

↪ Exemple 7

On définit sur $]-1\,;1[$ la fonction f par : $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.
On pose alors $u(x) = 1-x^2$, et on a $f = \sqrt{u}$.
u est dérivable sur $]-1\,;1[$ et : $u'(x) = -2x$.
Par la propriété précédente, f est dérivable sur $]-1\,;1[$ et :
$f'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

♯ Propriété 6

On considère u une fonction définie sur un intervalle I et $n \in \mathbb{N}$
(ou $n \in \mathbb{Z}^-$ si $\forall x \in \mathrm{I}, u(x) \neq 0$).
Si u est dérivable, alors u^n aussi et :
$(u^n)' = n \times u' \times u^{n-1}$

↪ Exemple 8

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par : $f(x) = (2x-4)^4$.
On pose $u(x) = 2x-4$, et on a $f = u^4$.
u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 2$.
Par la propriété précédente, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$f'(x) = 4 \times 2 \times (2x-4)^{4-1} = 8(2x-4)^3$.

Remarque :
Les deux formules précédentes et celles concernant $\frac{1}{v}$ suivent un même modèle : en effet, si une fonction est de la forme $f : x \mapsto v\big(u(x)\big)$, alors l'expression de sa dérivée est
$f'(x) = u'(x) \times v'\big(u(x)\big)$.

On peut retrouver cette formule plus aisément à l'aide de la notation de Leibniz : $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \times \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}$.